



Modèle 2 du Devoir surveillé 8 – Première année Bac sciences Maths

Chapitres. Arithmétique dans $\mathbb{Z}$; Dénombrement

Durée. 3 heures

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. Une attention particulière sera portée à la présentation, à la lisibilité et à la rigueur de la rédaction. Les réponses non argumentées seront ignorées.

○ Exercice 1 (5 points)

On veut distribuer 6 boules numérotées de 1 à 6 sur 3 trous numérotés de 1 à 3 de sorte que chaque trou contient exactement deux boules.

1pts

① Dénombrer le nombre de distributions possibles.

1pts

② Dénombrer le nombre de distributions pour lesquelles les boules B_1 et B_2 sont dans le trou T_1 .

1.5pts

③ Dénombrer le nombre de distributions pour lesquelles les boules B_1 et B_2 sont dans des trous différents.

1.5pts

④ Dénombrer le nombre de distributions pour lesquelles les boules qui portent des numéros pairs sont dans trois trous différents deux à deux.

○ Exercice 2 (6 points)

Un sac contient 26 jetons reprenant les 26 lettres de l'alphabet.

2pts

① On tire simultanément 5 jetons du sac. Déterminer le nombre de tirages distincts comprenant :

a) Exactement deux voyelles.

b) Au moins une voyelle.

2pts

② On tire successivement 5 jetons avec remise. Déterminer le nombre de tirages distincts comprenant :



2pts

a) Exactement deux voyelles.

b) Au moins une voyelle.

③ On tire successivement 5 jetons sans remise. Déterminer le nombre de tirages distincts comprenant :

a) Exactement deux voyelles.

b) Au moins une voyelle.

○ Exercice 3 (2 points)

0.5pts

Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules noires. On tire simultanément trois boules de l'urne.

① Combien y a-t-il de tirages possibles ?

1.5pts

② Combien y a-t-il de tirages comprenant :

a) Une seule boule noire ?

b) Au moins deux boules blanches ?

c) Au plus deux boules noires ?

○ Exercice 4 (7 points)

- Les deux parties de cet exercices sont indépendantes.

Partie I

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence;

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

0.5pts

① Déterminer les valeurs des termes $u_2, u_3, \dots, u_6$.

1pts

② Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} = 2u_n + 1$$

puis déduire le pgcd de u_{n+1} et u_n .

2pts

③



a) Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = 2^n - 1$$

Que vaut le pgcd de $2^{n+1} - 1$ et $2^n - 1$ où $n \in \mathbb{N}$? Justifier.

b) Vérifier que pour tout couple d'indices $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$u_{n+p} = u_p(u_p + 1) + u_p$$

c) En déduire que

$$u_{n+p} \wedge u_p = u_n \wedge u_p$$

1.5pts

④ Montrer que pour tout couple d'indices $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$u_n \wedge u_m = u_{n \wedge m}$$

Partie II

1pts

① Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation

$$(E_1), \quad \bar{3}x = \bar{4}$$

1pts

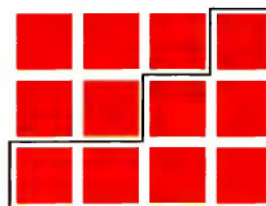
② Résoudre dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ l'équation

$$(E_2), \quad (x + \bar{1})(\bar{3}x - \bar{2}) = \bar{0}$$

○ Bonus 1 (4 points)

Dans une ville rectangulaire, il y a 11 rues horizontales et 21 rues verticales qui ont partagé la ville en blocs carrés (remarquez que le nombre de blocs horizontaux et verticaux est inférieur d'une unité au nombre de rues).

- Quel est le nombre de façons qui permettent, en partant d'un coin de la ville, d'atteindre le coin opposé par le chemin le plus court ?



3 × 4 blocs
4 × 5 rues



○ Bonus 2 (3 points)

Une petite fille compte sur ses doigts : 1 sur le pouce, 2 sur l'index, 3 sur le majeur, 4 sur l'annulaire, 5 sur l'auriculaire, 6 sur l'annulaire, 7 sur le majeur, 8 sur l'index, 9 sur le pouce et ainsi de suite... Son père lui demande ce qu'elle fait. Je veux savoir sur quel doigt tombera 9999! répond-elle.

- Pouvez-vous lui donner la réponse ?

* * *

Fin