



Modèle 1 du Devoir surveillé 8 – Première année Bac sciences Maths

Chapitres. Arithmétique dans $\mathbb{Z}$; Dénombrement

Durée. 3 heures

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. Une attention particulière sera portée à la présentation, à la lisibilité et à la rigueur de la rédaction. Les réponses non argumentées seront ignorées.

○ Exercice 1 (7 points)

Partie I

Un sac contient 9 jetons répartis comme suit; 4 jetons blancs marqués 1, 1, 2 et 6, et 5 jetons rouges marqués 2, 2, 2, 3 et 4 (on suppose que tous les jetons sont indiscernables au toucher).

- On tire simultanément 3 jetons du sac.

1pts

① Dénombrer le nombre de tirages possibles.

2.5pts

② Dénombrer le nombre de tirages possibles comprenant :

- Trois jetons rouges.
- Au moins un jeton blanc.
- Trois jetons dont la somme des numéros marqués est égale à 8.
- Un jeton et un seul blanc et un jeton et un seul portant un numéro multiple de 3.
- Deux jetons portant le numéro 1 et un seul portant le numéro 2.

Partie II

On tire successivement et sans remise 3 jetons du sac. Dénombrer le nombre de tirages possibles dans chacun des cas suivants :

0.5pts

① Le premier jeton tiré porte le numéro 2.



0.5pts

② Obtenir un seul jeton marqué 2.

1pts

③ Le premier jeton tiré est blanc et le deuxième jeton tiré est marqué 2.

Partie III

1.5pts

- Mêmes questions que la partie II, lors d'un tirage de 3 jetons successivement et avec remise.

○ Exercice 2 (5 points)

On dispose de 5 casiers numérotés de 1 à 5 et de 3 boules portant les lettres a, b et c. On range les 3 boules dans les 5 casiers, chaque boule va dans un casier et chaque casier peut contenir aucune boule, une boule ou plusieurs.

0.5pts

① Combien y a-t-il de rangements possibles ?

1pts

② Combien y a-t-il de rangements pour lesquels chaque casier contient au plus une boule ?

1pts

③ Combien y a-t-il de rangements pour lesquels le casier numéro 1 contient 2 boules et le casier numéro 2 une seule ?

1pts

④ Combien y a-t-il de rangements pour lesquels le casier numéro 1 ne contient aucune boule ?

1.5pts

⑤ Dans cette question, on suppose que chaque casier ne peut contenir plus d'une boule.

a) Combien y a-t-il de rangements possibles ?

b) Combien y a-t-il de rangements pour lesquels le casier numéro 1 est vide ?

○ Exercice 3 (3 points)

Soit $n \geq 3$ un entier et on pose $a_n = n^3 + n^2 + 12$ et $b_n = n - 2$.

1pts

①

a) Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a

$$a_n \wedge b_n = b_n \wedge 24$$

b) Déterminer toutes les valeurs possibles de l'entier $d_n = a_n \wedge b_n$ en justifiant votre réponse.



2pts

②

- a) Déterminer tous les entiers $n \geq 3$ pour lesquels b_n divise a_n .
- b) Déterminer tous les entiers $n \geq 3$ pour lesquels $d_n = 12$.
- c) Déterminer tous les entiers $n \geq 3$ pour lesquels $d_n = 8$.

○ Exercice 4 (5 points)

Partie I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier et on pose $a_n = 2 \times 10^n + 1$ et $b_n = 2 \times 10^n - 1$.

0.5pts

① Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'entier a_n est un multiple de 3.

0.75pts

② Montrer que $a_n \wedge b_n = b_n \wedge 2$ puis déduire que a_n et b_n sont premiers entre eux.

1.25pts

③

- a) L'entier b_3 est-il premier ?
- b) L'entier b_3 divise-t-il l'entier

$$N = 2^{1998} - 1 \quad ?$$

Justifier votre réponse.

Partie II

On note A et B les deux entiers $A = 7056$ et $B = 5445$.

0.5pts

① En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le pgcd de A et B .

1pts

② Décomposer les deux entiers A et B en produit de facteurs premiers puis déterminer le nombre de diviseurs positifs de A et B .

1pts

③ Déterminer tous les entiers k pour lesquels les deux entiers kA et kB aient le même nombre de diviseurs positifs.

○ Bonus (3 points)

Un alphabet d'une certaine langue comporte trois lettres. Les mots n'ont pas plus de quatre lettres.



- *Dans cette langue, combien existe-t-il de phrases qui contiennent exactement cinq mots ?*

* * *

Fin