



Modèle 2 du Devoir surveillé 7 – Première année Bac sciences Maths

Chapitres. Étude de fonctions; Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Durée. 3 heures

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. Une attention particulière sera portée à la présentation, à la lisibilité et à la rigueur de la rédaction. Les réponses non argumentées seront ignorées.

○ Exercice 1 (8 points)

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = x\sqrt{1 - \frac{2}{x}} \quad \text{si } x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

0.75pts

①

- a) Déterminer D_f .
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

1.5pts

②

- a) Étudier la dérivabilité de f à gauche en $x_0 = 0$ et interpréter le résultat obtenu.
- b) Étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 2$ et interpréter géométriquement ce résultat obtenu.

1.25pts

③

- a) Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]2; +\infty[$.

$$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[, \quad f'(x) = \frac{x-1}{x \times \sqrt{1 - \frac{2}{x}}}.$$

- b) Dresser le tableau de variation de f en justifiant votre réponse.

1.5pts

④

- a) Montrer que (C_f) admet aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$ une asymptote oblique (Δ) d'équation $y = x - 1$.
- b) Étudier la position relative de (C_f) et (Δ) .

2pts

⑤

- a) Construire (C_f) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- b) Montrer que (C_f) est symétrique par rapport au point $\Omega(1; 0)$.
- c) Déterminer graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation $(E) : f(x) = mx - 1$.

1pts

⑥

- Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [2; +\infty[$.
- a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J = [0; +\infty[$.
- b) Construire la courbe (C_g) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

○ Exercice 2 (7 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + 3 - \sqrt{x^2 + 5}.$$

0.75pts

①

- Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, puis interpréter géométriquement ce résultat.

1.25pts

②

- a) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
- b) Montrer que (C_f) admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote oblique (Δ) d'équation $y = 2x + 3$.

1pts

③

- Montrer que (C_f) coupe l'axe (Ox) en un seul point que l'on déterminera.

2pts

④

- a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5} - x}{\sqrt{x^2 + 5}}.$$

- b) En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variation complet.



1pts

c) Écrire l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $x_0 = -\frac{2}{3}$.

⑤

a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - x = \frac{4 - x^2}{3 + \sqrt{x^2 + 5}}.$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$, puis étudier la position relative de (C_f) par rapport à la droite $(\Delta) : y = x$.

1pts

⑥ Construire (C_f) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

○ Exercice 3 (5 points)

1pts

① En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer l'entier $u \in \{1, 2, \dots, 22\}$ tel que

$$10u \equiv 1 \pmod{23}$$

2pts

② Soient m un entier naturel et q et r , respectivement, le quotient et le reste de la division euclidienne de m par 10.

a) Montrer que $m \equiv 10(q + ur) \pmod{23}$.

b) Montrer que 23 divise m si et seulement si 23 divise $q + ur$.

2pts

③ On considère dans $\mathbb{N}$ le système

$$(S) : \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{23} \\ x \equiv 2 \pmod{10} \end{cases}$$

a) Montrer que si x est une solution du système (S) , alors il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $x = 10q + 2$ et 23 divise $q + 7$.

b) Résoudre dans $\mathbb{N}$ le système (S) .

○ Bonus (4 points)

On dispose d'un nombre illimité de pièces de valeurs :

1, 2, 5, 10, 20, 50 centimes, et 1 euro = 100 centimes.

- On suppose qu'on peut obtenir une somme de A centimes avec exactement B pièces.



Alors on peut obtenir une somme de B euros (c'est-à-dire $100B$ centimes) avec exactement A pièces.

* * *

Fin