



# Modèle 1 du Devoir surveillé 7 – Première année Bac sciences Maths

## Chapitres. Étude de fonctions; Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Durée. 2 h 30 min

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. Une attention particulière sera portée à la présentation, à la lisibilité et à la rigueur de la rédaction. Les réponses non argumentées seront ignorées.

### ○ Exercice 1 (6 points)

On considère la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sin(2x)}$$

1pts

- ① Déterminer  $\mathcal{D}_f$  l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .

1.5pts

②

a) Montrer que la fonction  $f$  est  $2\pi$ -périodique.

b) Prouver que pour tout  $x \in \mathcal{D}_f$ , on a  $f(x + \pi) = -f(x)$ .

1pts

- ③ Montrer que la fonction  $f$  est dérivable sur tout intervalle inclus dans  $\mathcal{D}_f$  et on a pour tout  $x \in \mathcal{D}_f$ ,

$$f'(x) = \frac{2}{\sin^3(2x)} \times (\sin^3(x) - \cos^3(x))$$

1.5pts

- ④ Soit  $g$  la restriction de la fonction  $f$  sur  $[0, \pi] \cap \mathcal{D}_f$  et  $(\mathcal{C})$  la courbe de la fonction  $g$  dans un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ .

a) Étudier les variations de  $g$ .

b) Tracer la courbe  $(\mathcal{C})$ .

1pts

- ⑤ Construire la courbe de la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $[0, 2\pi] \cap \mathcal{D}_f$ .



## ○ Exercice 2 (7 points)

On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 2x} + \sqrt{2x^2 - 2x}$$

et soit  $C_f$  le graphe de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé.

1.5pts

①

a) Déterminer  $\mathcal{D}_f$  l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .

b) Montrer que la fonction  $f$  est paire.

1pts

② Étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite en  $x_0 = 1$ .

2.5pts

③ On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathcal{D}_f$  par

$$g(x) = f(x)^2$$

pour tout  $x \in \mathcal{D}_f$ .

a) Montrer que pour tout  $x \in ]1, +\infty[$  on a

$$g(x) > 2$$

b) Montrer que la fonction  $g$  est dérivable en tout point  $x$  de  $\mathcal{D}_f$  différent de  $\pm 1$  et que

$$g'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^4 - x^2}} \times (g(x) - 2)$$

c) En déduire que la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[1, +\infty[$ .

2pts

④

a) Déterminer la branche infinie de la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$ .

b) Tracer le graphe  $C_f$ .

## ○ Exercice 3 (7 points)

• Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes.

0.75pts

① Montrer que pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}$ , 9 divise  $7^{3n} - 1$ .

0.75pts

② Déterminer le reste de la division euclidienne de  $2792^{2026}$  par 5.

1.5pts

③

a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$3^{3n} \equiv 1 \pmod{13}$$

b) En déduire que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , l'entier  $3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1$  est un multiple de 13.

1pts

④ Déterminer tous les entiers  $x \in \{0, 1, \dots, 143\}$  tels que  $x$  soit premier avec 144.

1pts

⑤ Déterminer le pgcd de  $7^{n+2} - 7^n$  et  $5^{n+2} - 5^n$  où  $n \geq 1$  un entier naturel.

1pts

⑥ Déterminer le plus petit entier  $p \geq 3$  tel que les restes des divisions euclidiennes de  $p$  par 12 et par 18 soit tous les deux égaux à 3.

1pts

⑦ En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le pgcd de 138807 et 52089 puis simplifier le rapport

$$\frac{138807}{52089}$$

1pts

⑧ Montrer que l'entier 2017 est premier et que 2025 est un carré parfait.

1pts

⑨ Par combien de zéros se termine l'écriture en base décimale de l'entier

$$N = 50! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 50 \quad ?$$

### ○ Bonus (4 points)

- Déterminer tous les triplets d'entiers relatifs  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$  tels que l'entier

$$N = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2} + 2$$

soit une puissance de 2016.

\* \* \*

Fin