



Modèle 2 du Devoir surveillé 6 – Première année Bac sciences Maths

Chapitres. Limites; Dérivation et applications

Durée. 3 heures

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. Une attention particulière sera portée à la présentation, à la lisibilité et à la rigueur de la rédaction. Les réponses non argumentées seront ignorées.

○ Exercice 1 (2 points)

1pts

① Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \sin(\pi x) + 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

1pts

② En déduire la valeur de la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(\pi x) + 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x + 1}$$

○ Exercice 2 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{**}$ par

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}), f(x) = \frac{ax^2 + (a^2 - 3a)x + 1}{ax}$$

où $a \in \mathbb{R}^{*+}$.

1.5pts

① Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2.25pts

②

a) Montrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}), f'(x) = \frac{(\sqrt{a}x + 1)(\sqrt{a}x - 1)}{ax^2}.$$

b) Dresser le tableau de variation de f en justifiant votre réponse.

1pts

③ Vérifier que

$$a\sqrt{a} - 3\sqrt{a} + 2 = (\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 1)^2.$$

1.25pts

④ Dédurre de ce qui précède que

$$\left(\forall (a, b, c) \in (\mathbb{R}^{*+})^3 \right), abc = 1 \Rightarrow a + b + c \geq 3.$$

○ Exercice 3 (8 points)

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = (1 - x)\sqrt{2x - x^2}$$

① Vérifier que $D_f = [0, 2]$.

② a) Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

puis interpréter géométriquement ce résultat.

b) La fonction f est-elle dérivable à gauche en $x_0 = 2$? Justifier votre réponse puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

③ Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $[0, 2[$ et que

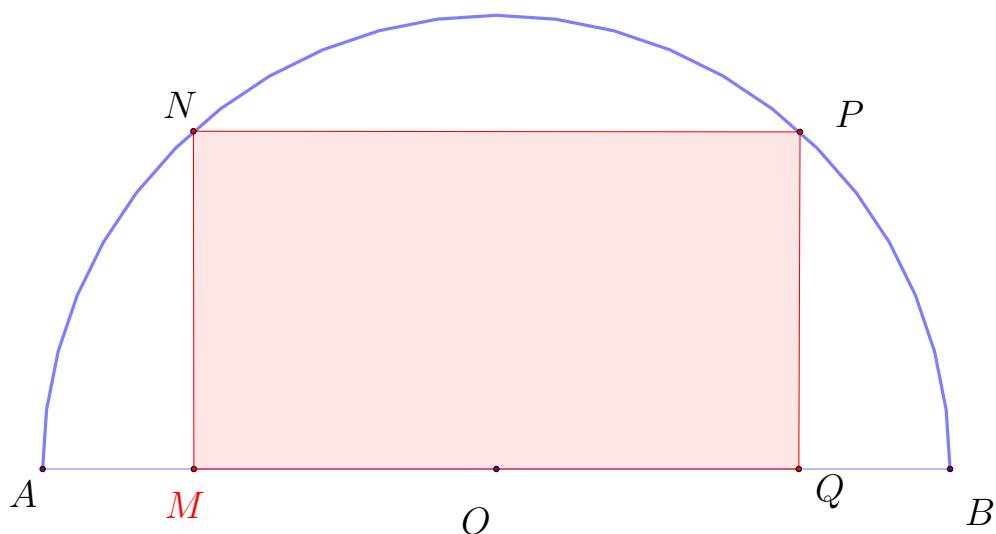
$$\forall x \in]0, 2[, \quad f'(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

④ Dresser le tableau de variation de f en justifiant soigneusement votre réponse.

1.5pts

⑤ On considère un demi cercle (C) de centre O et de diamètre $[AB]$ avec $AB = 2$. M est un point variable du segment $[OA]$ avec $M \neq O$ et $M \neq A$. N et P sont deux points du demi cercle (C) et Q un point du segment $[OB]$ tels que $MNPQ$ est un rectangle.

• On pose $x = AM$ et on désigne par $S(x)$ la surface de $MNPQ$.



- Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, on a $S(x) = 2f(x)$ puis en déduire les positions des points M pour que la surface du rectangle $MNPQ$ soit maximale.

○ Exercice 4 (4 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto 1 - \frac{2}{x^2 - x}$.

1pts

- ① Déterminer D_f , puis calculer les limites de f aux bornes de D_f .

1pts

②

- a) Montrer que f est dérivable sur chaque intervalle de D_f , et que

$$(\forall x \in D_f), f'(x) = \frac{2(2x - 1)}{(x^2 - x)^2}.$$

- b) Dresser le tableau de variation de f en justifiant votre réponse.

2pts

③

- a) Prouver que

$$\left(\forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right), \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \theta}\right) \times \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \theta}\right) \geq 9.$$

- b) Pour quelles valeurs de θ l'égalité a-t-elle lieu dans l'inégalité précédente ?



○ Bonus (3 points)

Soit f la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$$

- Montrer qu'il existe une et une seule droite qui soit tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f en deux points distincts dans un repère orthonormé et déterminer l'équation de cette tangente ($\mathcal{T}$).

* * *

Fin