



Modèle 1 du Devoir surveillé 6 – Première année Bac sciences Maths

Chapitres. Limites; Dérivation et applications

Durée. 3 heures

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. Une attention particulière sera portée à la présentation, à la lisibilité et à la rigueur de la rédaction. Les réponses non argumentées seront ignorées.

○ Exercice 1 (4 points)

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{(x - \alpha)^2}{x^3} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}^{*+}.$$

0.75pts

① Calculer les limites de f aux bornes de D_f .

1.75pts

②

a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*), f'(x) = \frac{(x - \alpha)(-x + 3\alpha)}{x^4}$.

b) Dresser le tableau de variation de f en justifiant votre réponse.

1.5pts

③ Soient $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^{*+})^3$.

• Prouver que

$$a \times \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3,$$

puis en déduire une condition nécessaire et suffisante pour que l'égalité soit réalisée.

○ Exercice 2 (5 points)

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{4}{x-1}.$$



1pts

① Déterminer $\mathcal{D}_f$, puis calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

1.25pts

②

a) Justifier que f est dérivable sur tout intervalle de $\mathcal{D}_f$, puis montrer que

$$(\forall x \in \mathcal{D}_f) : f'(x) = x - 2 - \frac{4}{(x-1)^2}.$$

b) Écrire l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 2$.

1.75pts

③

a) Montrer que

$$(\forall x \in \mathcal{D}_f) : f''(x) = \frac{(x+1)(x^2 - 4x + 7)}{(x-1)^3}.$$

b) Dresser le tableau de variation de f' en précisant $f'(3)$.

1pts

④ Dresser le tableau de variation de f en justifiant soigneusement votre réponse.

○ Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = x^4 - 4x.$$

0.75pts

① Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

0.75pts

② Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = 4(x^3 - 1).$$

1pts

③ Montrer que f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ et qu'elle est strictement décroissante sur $] -\infty; 1]$.

1.5pts

④

a) Dresser le tableau de variation complet de f .

b) En déduire que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : x^4 + 3 \geq 4x.$$

1pts

⑤ Soient a, b, c des nombres réels strictement positifs.

- Montrer que

$$abc = 1 \implies (a^2 + 3)(b^2 + 3)(c^2 + 3) \geq 64$$

Indication. Utiliser la question 4)-b).

○ Exercice 4 (4 points)

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = x\sqrt{3-x}.$$

1pts

① Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f , puis calculer

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

1pts

② Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)}{x-3} = -\infty$$

puis interpréter géométriquement ce résultat.

2pts

③

a) Montrer que

$$(\forall x \in]-\infty; 3[) : f'(x) = \frac{3(2-x)}{2\sqrt{3-x}}$$

b) Dresser le tableau de variation complet de f en justifiant votre réponse.

○ Exercice 5 (2 points)

Soit f la fonction définie par

$$f(0) = -1 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{\cos x - \sqrt{1+2x}}{x} \quad \text{si } x \neq 0.$$

1.25pts

①

a) Justifier que $D_f = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.



b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

0.75pts

- ② Montrer que f est dérivable en 0, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

○ Bonus (3 points)

Soit θ un nombre réel de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- Prouver que

$$\theta \leq \frac{2}{3} \sin(\theta) + \frac{1}{3} \tan(\theta)$$

* * *

Fin