



Modèle 2 du Devoir surveillé 4 – Première année Bac sciences Maths

Chapitres. Analytique du produit scalaire; Rotation dans le plan

Durée. 2 h 30 min

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. Une attention particulière sera portée à la présentation, à la lisibilité et à la rigueur de la rédaction. Les réponses non argumentées seront ignorées.

○ Exercice 1 (5.5 points)

Soit $\triangle ABC$ un triangle dont le cercle circonscrit est noté (C) . Soit (γ) l'arc $\widehat{AB}$ du cercle (C) qui ne contient pas le point C privé des points A et B . On associe à chaque point $M \in (\gamma)$ le point M' vérifiant $M' \in [AM]$ et $AM' = BM$. Soit Ω le point d'intersection du segment $[AB]$ et l'ensemble (γ) . On considère la rotation r de centre Ω qui transforme B en A .

2pts

① Soit M un point de (γ) et $N = r(M)$.

a) Montrer que

$$(\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AN}) = (\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AM})$$

b) En déduire que $r(M) = M'$.

2pts

② Prouver que lorsque le point M varie sur (γ) , la mesure de l'angle $\widehat{BM}, \overrightarrow{AM'}$ reste invariant.

1.5pts

③ Identifier les lieux géométriques des points M' lorsque M varie dans l'ensemble (γ) .

○ Exercice 2 (4.5 points)

Dans le plan orienté, on considère un carré $ABCD$ de centre O tel que

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$



Soit S la symétrie centrale de centre O et r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2pts

①

a) Vérifier que

$$(S \circ r^{-1})(D) = D$$

b) Montrer que $S \circ r^{-1}$ est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

2.5pts

② Soit M un point du plan. On note $r(M) = N$ et $S \circ r(M) = M'$.

a) Montrer que $AN = CM'$ et $(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM'}) \equiv \pi \pmod{2\pi}$.

b) En déduire que $\overrightarrow{NM'} = \overrightarrow{AC}$ puis que $S \circ r = t_{\overrightarrow{AC}} \circ r^{-1}$ où $t_{\overrightarrow{AC}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

○ Exercice 3 (4 points)

Soit $\triangle ABC$ un triangle équilatéral. Soit (C) l'ensemble des points M du plan qui vérifient

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2AB^2$$

1.5pts

① Montrer que (C) est le cercle circonscrit du triangle $\triangle ABC$.

1.5pts

② Soit M un point de l'arc $\widehat{BC}$ du cercle (C) qui contient le point A .
Montrer que

$$AM^2 = AB^2 - MB \times MC$$

1pts

③ En déduire que pour tout point M appartenant à l'arc $\widehat{BC}$ du cercle (C) (qui contient le point A), on a

$$MA = |MB - MC|$$

○ Exercice 4 (6 points)

On munit le plan d'un repère orthonormé.

A tout nombre réel α , on associe le cercle (C_α) d'équation

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2(\alpha + 1)y + (\alpha + 1)^2 = 0$$

1pts

① Déterminer le centre et le rayon du cercle (C_α) pour tout nombre réel α .

2.5pts

② Soient α et β deux nombres réels.



2.5pts

Montrer que

$$\alpha\beta < 0 \implies (\mathcal{C}_\alpha) \cap (\mathcal{C}_\beta) = \emptyset$$

- ③ Déterminer l'ensemble des points M du plan pour lesquelles il existe $m \in \mathbb{R}$ vérifiant $M \in (\mathcal{C}_m)$.

○ Bonus (3 points)

On considère un parallélogramme $ABCD$ dont les angles sont tous non droits.

- Construire un carré dont les sommets appartiennent respectivement aux segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

* * *

Fin