



Modèle 2 du Devoir surveillé 3 – Première année Bac sciences Maths

Chapitres. Suites numériques; Calcul trigonométrique

Durée. 3 heures

Réalisé par le professeur Saad Choukri

Note. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. Une attention particulière sera portée à la présentation, à la lisibilité et à la rigueur de la rédaction. Les réponses non argumentées seront ignorées.

○ Exercice 1 (2 points)

Montrer que pour tout $x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, on a

$$\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x} = 2 \cos \left(\frac{x}{2} \right)$$

○ Exercice 3 (3.5 points)

Soient x, y et z trois nombres réels strictement positifs tels que

$$x + y + z = \pi$$

1.5pts

① Montrer que

$$\sin \left(\frac{y}{2} \right) \sin \left(\frac{z}{2} \right) \leq \frac{1}{2} \left(1 - \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right)$$

1pts

② En déduire que

$$\sin \left(\frac{x}{2} \right) \sin \left(\frac{y}{2} \right) \sin \left(\frac{z}{2} \right) \leq \frac{1}{8}$$

1pts

③ Montrer que

$$\left(1 - \cos \left(\frac{x}{2} \right) \right) \left(1 - \cos \left(\frac{y}{2} \right) \right) \left(1 - \cos \left(\frac{z}{2} \right) \right) \leq \frac{1}{8}$$

○ Exercice 3 (4.5 points)

Soient α, β et γ les mesures des angles d'un triangle ΔABC . Démontrer que

1pts

①

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

1pts

②

$$\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) - \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

1.5pts

③

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

1pts

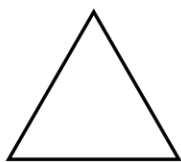
④

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) + \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1$$

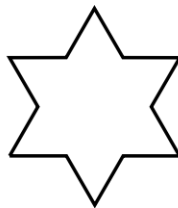
○ Exercice 4 (10 points)

Question. Peut-on trouver un domaine dont l'aire est inférieure à 2 et dont la frontière est une ligne polygonale de longueur infiniment grande ?

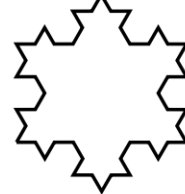
C_0



C_1



C_2



Soit C_0 un triangle équilatéral dont la longueur du côté est 1.

On partage chaque côté en trois segments de même longueur.

Sur le segment central on construit, vers l'extérieur de C_1 , un triangle équilatéral et on supprime ce segment central. On obtient un polygone C_∞ .

On peut réitérer le processus infiniment.

On note C_n le polygone obtenu à la $n^{\text{ième}}$ étape.

Pour le polygone C_n , on note



- x_n le nombre de ses côtés,
- l_n la longueur de chaque côté,
- P_n son périmètre,
- A_n son aire.

On a $x_0 = 3, l_0 = 1, P_0 = 3, A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

2pts

① Calculer x_1, l_1, P_1, A_1 et x_2, l_2, P_2, A_2 .

4pts

②

a) Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n .

En déduire l'expression de x_n en fonction de n .

b) Exprimer l_{n+1} en fonction de l_n .

En déduire l'expression de l_n en fonction de n .

c) Exprimer P_n en fonction de n . Calculer la limite de la suite (P_n) .

1pts

③ Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$A_{n+1} = A_n + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

1pts

④ En déduire que

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \times \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$$

1pts

⑤ Répondre à la question posée au début.

○ Bonus (3 points)

Résoudre dans le domaine $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$ l'équation

$$(E_0), \quad \sin\left(\frac{\pi}{8 \sin^2(x)}\right) + E(\sqrt{1 - \cos(2x)}) = \frac{3}{2}$$

d'inconnue x .



Remarque. On désigne par $E(t)$ la partie entière du nombre réel t .

* * *

Fin