



Modèle 1 du Devoir surveillé 3 – Première année Bac sciences Maths

Chapitres. Suites numériques; Calcul trigonométrique

Durée. 3 heures

Réalisé par le professeur Saad Choukri

Note. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. Une attention particulière sera portée à la présentation, à la lisibilité et à la rigueur de la rédaction. Les réponses non argumentées seront ignorées.

○ Exercice 1 (4 points)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite (dite de Fibonacci) définie par $f_0 = f_1 = 1$ et pour tout entier $n \geq 0$, la relation de récurrence a lieu;

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

0.5pts

① Montrer que la suite (f_n) est croissante.

1.25pts

② Prouver que pour tout entier $n \geq 3$, on a $f_{n+1} < 2f_n$.

1.25pts

③ Soit $(F_n)_{n \geq 0}$ la suite numérique définie par

$$F_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^2} + \dots + \frac{f_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{f_n}{3^n}$$

Trouver une relation entre F_n , F_{n-2} , f_n et n .

1.5pts

④ Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$f_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^{n+1}\sqrt{5}}$$

○ Exercice 2 (3 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n} - \frac{2}{u_n^2}$$



1pts

① Montrer que la suite (u_n) est minorée par 2.

0.75pts

② Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - 2 \leq \frac{u_n - 2}{4}$$

1.25pts

③ En déduire que

$$0 < u_n - 2 < \frac{1}{4^n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

○ Exercice 3 (4 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = |x| - 2 + \sqrt{x^2 + 1}$$

0.5pts

① Étudier la parité de la fonction f .

1.25pts

② Étudier les variations de la fonction f sur $[0, +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

0.75pts

③ Montrer que f possède un minimum global sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

1.5pts

④ On considère la suite numérique (u_n) définie par son terme initial $u_0 = 3$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq 3$.

b) Prouver que

$$u_{n+1} \geq u_n + 1$$

pour tout entier $n \geq 0$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n \geq n + 3$$

d) La suite (u_n) est bornée ? Justifier votre réponse.



○ Exercice 4 (5 points)

On pose pour tout nombre réel x ,

$$f(x) = \sqrt{3}(4 \cos^2 x + \sin^2(2x)) - 2 \sin x$$

0.75pts

- ① Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$4 \cos^4(x) = 4 \cos^2(x) - \sin^2(2x)$$

2pts

②

- a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = 4 \cos(x)(\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x))$$

- b) Résoudre dans le domaine $[-\pi, \pi]$ l'équation

$$(E), \quad f(x) = 0$$

2.25pts

③

- a) Vérifier que pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, on a

$$f(x) = 4 \cos^2(x)(\sqrt{3} - \tan(x))$$

- b) Résoudre dans le domaine $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ l'inéquation

$$(I), \quad f(x) \geq 0$$

○ Exercice 5 (4 points)

Soit a un nombre réel qui ne s'écrit pas sous la forme $\frac{k\pi}{8}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On note A le nombre réel

$$A = \tan(a) \tan(2a) \tan(4a)$$

2pts

①

- a) Montrer que

$$A = \frac{4 \sin^2(a) \times \sin(2a)}{\cos(4a)}$$



b) En déduire que

$$A = \frac{2 \sin(a) (\cos(a) - \cos(3a))}{\cos(4a)}$$

2pts

② On suppose dans cette question que $a = \frac{\pi}{9}$.

a) Montrer que

$$A = \frac{\sin(2a) - \sin a}{\cos(4a)} = \frac{\sqrt{3} \sin(\frac{a}{2})}{\cos(4a)}$$

b) En déduire que

$$\tan\left(\frac{\pi}{9}\right) \tan\left(\frac{2\pi}{9}\right) \tan\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \sqrt{3}$$

○ Bonus (4 points)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par son terme initial $u_0 = 0$ et par la relation

$$|u_n| = |u_{n-1} + 1|$$

pour tout entier $n \geq 1$.

Quelle est la valeur minimale que peut prendre $|u_1 + u_2 + \dots + u_{2025}|$?

* * *

Fin