



Modèle 1 du Devoir surveillé 2 – Première année Bac sciences Maths

Chapitres. Barycentre dans le plan; Généralités sur les fonctions

Durée. 3 heures

Réalisé par le professeur Saad Choukri

Note. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. Une attention particulière sera portée à la présentation, à la lisibilité et à la rigueur de la rédaction. Les réponses non argumentées seront ignorées.

○ Exercice 1 (4.5 points)

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$$

1.5pts

①

- a) Justifier pourquoi f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
- b) Montrer que la fonction f est minorée par $-1/2$. Peut-on dire que $-1/2$ est une valeur minimale de f ? Justifier.

1.75pts

②

- a) Montrer que pour tous réels $x \neq y$, on a

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{1 + f(x) + f(y)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{y^2 + y + 1}}$$

- b) En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire à propos de l'injectivité de f ?

1.25pts

③

- Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers l'intervalle $\left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[$ puis expliciter sa bijection réciproque f^{-1} .



○ Exercice 2 (5.5 points)

On considère la fonction h définie par

$$h(t) = \sqrt{(t - E(t))^2 + 2026}$$

0.5pts

- ① Déterminer $\mathcal{D}_h$ l'ensemble de définition de la fonction h .

1.25pts

②

a) Déterminer la valeur minimale α de la fonction h .

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E), \quad h(t) = \sqrt{2026}$$

d'inconnue t .

c) La fonction h est-elle injective ?

0.5pts

- ③ Montrer que la fonction h est majorée.

1.25pts

④

a) Montrer que la fonction h est 1-périodique.

b) Montrer que la fonction h est strictement croissante sur l'intervalle $[0, 1[$.

c) En déduire les variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

2pts

- ⑤ On définit la fonction H sur $\mathbb{R}$ par

$$H(t) = (h(t))^2 - 2026$$

a) Justifier pourquoi la fonction H est 1-périodique.

b) Étudier la parité de la fonction H .

c) Tracer le graphe (C_H) de la fonction H dans un repère orthonormé.

○ Exercice 3 (7 points)

Soit $ABCD$ un carré dans le plan $\mathcal{P}$ dont la longueur de son côté vaut a .
Déterminer et construire chacun des ensembles suivants;

1.5pts

①

$$(\Gamma_1) = \{M \in \mathcal{P}, \quad \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| \leq a\}$$

1.5pts

②

$$(\Gamma_2) = \{M \in \mathcal{P}, \quad \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = a\}$$

2pts

③

$$(\Gamma_3) = \{M \in \mathcal{P}, \quad a \leq \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| \leq 2a\}$$

2pts

④

$$(\Gamma_4) = \{M \in \mathcal{P}, \quad \|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\| \leq \|2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\|\}$$

○ Exercice 4 (3 points)

1pts

Soient a un nombre réel et $n \geq 2$ un entier naturel.

① Prouver que

$$[a] + \left[a + \frac{1}{2}\right] = [2a]$$

2pts

② Montrer en général que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[a + \frac{k}{n}\right] = [na]$$

où $[t]$ désigne la partie entière du nombre réel t .

○ Bonus (4 points)

On fixe un point O dans le plan $\mathbb{R}^2$ et on considère une fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 - \{O\} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\varphi(A) - \varphi(B) + \varphi(C) - \varphi(D) = 0$$

pour tout quadruplet de point (A, B, C, D) distincts deux à deux et tels que les triangle $\triangle AOB$ et $\triangle COD$ soient semblables.

Montrer que la fonction φ est constante.

* * *

Fin