



Modèle 1 du Devoir surveillé 2 – Première année Bac sciences Maths

Chapitres. Barycentre dans le plan; Généralités sur les fonctions

Durée. 3 heures

Réalisé par le professeur Saad Choukri

Note. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. Une attention particulière sera portée à la présentation, à la lisibilité et à la rigueur de la rédaction. Les réponses non argumentées seront ignorées.

○ Exercice 1 (5.5 points)

Soit f la fonction sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x(1 - x)$$

1.5pts

- ① Déterminer explicitement l'ensemble $f^{-1}\left(\left[-\frac{3}{4}, 0\right]\right)$.

1pts

②

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$$

b) La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est-elle surjective ? Justifier.

1pts

③

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(1 - x) = f(x)$$

b) La fonction f est-elle injective ? Justifier.

2pts

- ④ Soit φ la restriction de f sur l'intervalle $I = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right]$. On pose $J = \left] -\infty, \frac{1}{4} \right]$.

a) Pour $y \in J$; résoudre dans I l'équation $\varphi(x) = y$ (d'inconnue x).

b) En déduire que φ réalise une bijection de I vers J puis expliciter φ^{-1} .

○ Exercice 2 (7.5 points)

Soit $\triangle ACD$ un triangle rectangle en A vérifiant $AC = AD$. On note O le milieu du segment $[AC]$ et soient $B = \text{bar}\{(D, 1); (O, -2)\}$ et $I = \text{bar}\{(B, 2); (C, 1)\}$.

0.5pts

① Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

0.75pts

② La droite parallèle à (AC) et passant par I coupe (AB) en K .
Montrer que K est le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, 2)$.

2.5pts

③ Soit G le barycentre du système pondéré $\{(A, 1); (B, 2); (C, 1)\}$.

a) Montrer que les points I , A et G sont alignés.

b) Montrer que G est le milieu du segment $[OB]$ et que $G = \text{bar}\{(B, 3); (D, 1)\}$.

1.5pts

④ On se place dans le repère $(A, \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AD})$.

a) Déterminer les coordonnées des points B et G .

b) Montrer que les droites (BD) et (CG) sont perpendiculaires.

2.25pts

⑤ On désigne par $\mathcal{P}$ le plan.

a) Déterminer et construire l'ensemble de points (Γ) défini par

$$(\Gamma) = \{M \in \mathcal{P}, \quad \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|^2 + \|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}\|^2 = 16BC^2\}$$

b) Déterminer et construire l'ensemble (Δ_a) défini par

$$(\Delta_a) = \{M \in \mathcal{P}, \quad \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = a(2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \text{ où } a > 0\}$$

○ Exercice 3 (3.5 points)

On définit les fonctions g et h par

$$g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}}$$

0.5pts

① Déterminer $\mathcal{D}_g$ et $\mathcal{D}_h$ les ensembles de définition respectifs des fonctions g et h .

0.75pts

② Étudier la parité de chacune des deux fonctions g et h .

0.5pts

③ Montrer que la fonction g croît strictement sur $\mathbb{R}^+$ puis en déduire son tableau de variations.



0.75pts

④ Déterminer une fonction $f : \mathcal{D}_h \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $h = g \circ f$.

1pts

⑤ Dresser le tableau de variations de la fonction h en justifiant rigoureusement votre réponse.

○ Exercice 4 (3.5 points)

On note I l'intervalle $] -1, +\infty[$ et on considère une fonction $f : I \rightarrow I$ vérifiant

$$f(x + (1+x)f(y)) = y + (1+y)f(x)$$

et que la fonction $\varphi : x \mapsto f(x)/x$ est strictement croissante sur chaque intervalle inclus dans $I - \{0\}$.

1pts

① Montrer que pour tout $t \in I - \{0\}$, on a $f(t) \neq t$.

1pts

② Montrer que $f(0) = 0$.

1.5pts

③ Prouver que pour tout $x \in I$, on a

$$f(x) = -\frac{x}{x+1}$$

○ Bonus (4 points)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$f\left(\frac{h-k}{h+k}\right) = \frac{f(h) - f(k)}{f(h) + f(k)}$$

pour tout couple $(h, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que $h+k \neq 0$.

* * *

Fin