



Modèle 2 du Devoir surveillé 1 – Première année Bac sciences Maths

Chapitres. Logique et raisonnements; Ensembles et applications

Durée. 3 heures

Réalisé par le professeur Saad Choukri

Note. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. Une attention particulière sera portée à la présentation, à la lisibilité et à la rigueur de la rédaction. Les réponses non argumentées seront ignorées.

○ Exercice 1 (8.5 points)

1pts

- ① Soit x un nombre réel strictement positif.
Montrer que

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

1.5pts

- ② En déduire que pour $a, b, c \in]0, +\infty[$, on a

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$$

2.5pts

- ③ Soient $n \geq 2$ un entier naturel et $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels strictement positifs.
Montrer en utilisant la question 1 que

$$\left(a_1 + a_2 + \dots + a_n \right) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

1.5 pts

- ④ Obtenir le même résultat en utilisant un raisonnement par récurrence.

2pts

- ⑤ Soient $n \geq 1$ un entier et $b_1, \dots, b_n$ des nombres réels positifs vérifiant $b_1 b_2 \dots b_n = 1$.
Montrer que

$$\prod_{k=1}^n (1 + b_k) \geq 2^n$$



○ Exercice 2 (2.5 points)

Soient u et v deux nombres réels.

1 pts

① Montrer que

$$|u| + |v| \leq |u - v| + |u + v|$$

1.5 pts

② Prouver que

$$\frac{|u + v|}{1 + |u + v|} \leq \frac{|u|}{1 + |u|} + \frac{|v|}{1 + |v|}$$

○ Exercice 3 (9 points)

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

1pts

① Montrer que pour tout $x \in E$, on a $x \in f^{-1}(\{f(x)\})$.

1pts

② Donner un exemple où $f^{-1}(\{f(x)\})$ contient deux éléments. Que peut-on dire de f dans ce cas.

1pts

③ Montrer que pour toute partie $A \in \mathcal{P}(E)$, on a $A \subset f^{-1}(f(A))$.

1pts

④ Donner un exemple où cette inclusion est stricte.

3pts

⑤ Soit $S = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid f^{-1}(f(X)) = X\}$. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et $A' = f^{-1}(f(A))$.

a) Montrer que $A' \in S$.

b) Prouver que A' est le plus petit ensemble (au sens de l'inclusion) de S contenant A .

2pts

⑥ Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes,

(i) f est injective ;

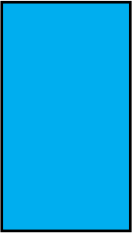
(ii) $\forall x \in E, \{x\} \in S$;

(iii) $S = \mathcal{P}(E)$;

(iv) le seul élément X de $\mathcal{P}(E)$ vérifiant $f^{-1}(f(X)) = E$ est E lui-même.



○ Bonus (3 points)



Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

pour tout couple (x, y) de nombres réels.

* * *

Fin