



# Modèle 1 du Devoir surveillé 1 – Première année Bac sciences Maths

## Chapitres. Logique et raisonnements; Ensembles et applications

Durée. 3 heures

Réalisé par le professeur Saad Choukri

Note. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. Une attention particulière sera portée à la présentation, à la lisibilité et à la rigueur de la rédaction. Les réponses non argumentées seront ignorées.

### ○ Exercice 1 (2.5 points)

1.5pts

Soit  $x$  un nombre réel.

① Montrer que

$$|\cos(x) + \sin(x)| \leq \sqrt{2}$$

1pts

② Pour  $x$  parcourant l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$ , déterminer la valeur maximale de l'expression  $\sin(x) \cos(x)$ . Justifier votre réponse.

### ○ Exercice 2 (4.5 points)

0.5pts

① Il existe un élève étudiant l'anglais.

0.5pts

② Dans toutes les classes, il existe un élève étudiant l'anglais.

0.5pts

③ Cet élève  $X$  étudie l'anglais et l'espagnol.

0.5pts

④ Au moins un élève étudie l'anglais et l'espagnol.

0.5pts

⑤ Tous les élèves étudiant l'espagnol étudient également l'anglais.

1pts

⑥ Dans toutes les classes, au moins un élève étudie à la fois l'anglais et l'espagnol.

1pts

⑦ Dans une classe au moins, tous les élèves étudient à la fois l'anglais et l'espagnol.



### ○ Exercice 3 (3 points)

Soit  $n \geq 3$  un entier naturel.

1.5pts

- ① Montrer par récurrence que le nombre de diagonales d'un polygone convexe à  $n$  sommets vaut

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

1.5pts

- ② Proposer une autre méthode pour prouver le résultat.

### ○ Exercice 4 (2 points)

Soit  $A_1, \dots, A_k$  des parties d'un ensemble. Montrer que

$$A_1 \cup \dots \cup A_k = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \dots \cup (A_{k-1} - A_k) \cup (A_k - A_1) \cup (A_1 \cap \dots \cap A_k)$$

### ○ Exercice 5 (8 points)

Soit  $E$  un ensemble et  $f : E \longrightarrow E$  une bijection. La conjugaison par  $f$  est l'application

$$C_f : E^E \longrightarrow E^E, \quad \varphi \longmapsto f \circ \varphi \circ f^{-1}.$$

1.5pts

- ① Montrer que  $C_f$  est une bijection de  $E^E$  dans lui-même.

1.5pts

- ② Étant donné une deuxième bijection  $g$  de  $E$  dans  $E$ , simplifier  $C_f \circ C_g$ .

1.5pts

- ③ Étant donné deux applications  $\varphi$  et  $\psi$  de  $E$  dans  $E$ , simplifier  $C_f(\varphi) \circ C_f(\psi)$ .

1.5pts

- ④ Soient  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{S}$  les sous-ensembles de  $E^E$  constitués des injections et des surjections. Montrer que  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{S}$  sont invariants par  $C_f$ .

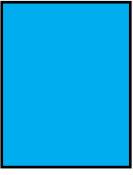
2pts

- ⑤ Si  $\varphi$  est bijective, que dire de  $(C_f(\varphi))^{-1}$  ?

Remarque. L'ensemble  $E^E$  désigne l'ensemble des applications  $f : E \rightarrow E$ .



○ Bonus (4 points)



*Construire une surjection de  $\mathbb{N}$  sur lui même admettant exactement pour tout entier de l'ensemble d'arrivée  $p$  antécédents où  $p \geq 1$  est un entier donné. En construire une pour laquelle chaque entier naturel admet une infinité d'antécédents.*

\* \* \*

*Fin*