المستوى. الجذع المشترك	تاريخ التمرير. الجمعة 3 فبراير 2023	مدة الإنجاز. ثلاث ساعات

ملاحظات هامة:

- هذه نسخة من النسخة الأصلية المكتوبة من قبل الكاتب. ومع ذلك، قد تحتوي على أخطاء محتملة في الكتابة.
- يدون المترشح على ورقة تحريره إسمه و نسبه (بالحروف العربية و اللاتينية)، تاريخ ميلاده، إسم مؤسسته و إسم المديرية.
- يمكن للمترشح تحرير أجوبته بإحدى اللغات الثلاثة، حسب الإختيار الذي يناسبه.

Sujet		الموضوع

PROBLÈME 1. Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. • Montrer que $$\frac{2ab}{a+b}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}$$	PROBLEM 1. Let a and b be two strictly positive real numbers. • Show that $$\frac{2ab}{a+b}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}$$	المسألة 1. ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين تماما. • برهن أن $$\frac{2ab}{a+b}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}$$
PROBLÈME 2. Les points du plan sont coloriés de telle sorte que chaque point soit blanc ou noir. • Montrer qu'il existe une couleur telle que pour tout nombre réel $x>0$, on puisse trouver deux points de cette couleur distants de x.	PROBLEM 2. The points of the plane are colored so that each point is either white or black. • Show that there exists a color such that for every real number $x>0$, one can find two points of that color at distance x.	المسألة 2. تم تلوين نقاط المستوى بحيث يكون كل نقطة إما بيضاء أو سوداء. • برهن أنه يوجد لون بحيث لكل عدد حقيقي $x>0$ يمكن إيجاد نقطتين من ذلك اللون تبعدان عن بعضهما بالمسافة x.
PROBLÈME 3. Soient A et B deux points d'un cercle $(\mathcal{C})$. On considère le point I du segment $[AB]$ tel que $AI=2IB$. Les points E et F sont les intersections de la perpendiculaire à (AB) passant par I avec le cercle $(\mathcal{C})$. Soit H le milieu du segment $[AI]$. • Montrer que le point H est l'orthocentre du triangle AEF.	PROBLEM 3. Let A and B be two points on a circle $(\mathcal{C})$. Consider the point I on the segment $[AB]$ such that $AI=2IB$. The points E and F are the intersections of the perpendicular to (AB) passing through I with the circle $(\mathcal{C})$. Let H be the midpoint of the segment $[AI]$. • Show that the point H is the orthocenter of triangle AEF.	المسألة 3. ليكن A و B نقطتان على دائرة $(\mathcal{C})$. نعتبر النقطة I على القطعة المستقيمة $[AB]$ بحيث يكون $AI=2IB$. النقطتان E و F هما تقاطعان العمود المنصف للقطعة (AB) المار عبر I مع الدائرة $(\mathcal{C})$. ليكن H منتصف القطعة $[AI]$. • برهن أن النقطة H هي مركز تعامد المثلث AEF.
PROBLÈME 4. Trouver tous les couples d'entiers naturels non nuls (a,b) tels que les nombres $\frac{3a^2}{b}$ et $\sqrt{a^2+b}$ soient des entiers naturels.	PROBLEM 4. Find all pairs of positive integers (a,b) such that the numbers $\frac{3a^2}{b}$ and $\sqrt{a^2+b}$ are natural integers.	المسألة 4. جد جميع أزواج الأعداد الطبيعية غير المنعدمة (a,b) بحيث يكون العددان $\frac{3a^2}{b}$ و $\sqrt{a^2+b}$ أعدادًا صحيحة طبيعية.

Version réécrite par Saad Choukri