المستوى. الجذع المشترك	تاريخ التمرير. الجمعة 5 فبراير 2021	مدة الإنجاز. ساعتان

ملاحظات هامة:

- هذه نسخة من النسخة الأصلية المكتوبة من قبل الكاتب. ومع ذلك، قد تحتوي على أخطاء محتملة في الكتابة.
- يدون المترشح على ورقة تحريره إسمه و نسبه (بالحروف العربية و اللاتينية)، تاريخ ميلاده، إسم مؤسسته و إسم المديرية.
- يمكن للمترشح تحرير أجوبته بإحدى اللغات الثلاثة، حسب الإختيار الذي يناسبه.

Sujet	الموضوع

Problème 1. Soient a, b et c des nombres réels tels que $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$.

- Montrer que

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} \leq 2$$

puis étudier le cas d'égalité.

Problem 1. Let a, b and c be real numbers such that $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$.

- Show that

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} \leq 2$$

and then study the equality case.

المسألة 1. ليكن a و b و c أعداداً حقيقية بحيث $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$.

- أثبت أن

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} \leq 2$$

ثم ادرس حالة المساواة.

Problème 2. Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC} = 60°$. Les points M, N et K appartiennent respectivement aux côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ tels que :

$$BK = KM = MN = NC, \quad AN = 2AK$$

- Déterminer la mesure de chacun des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.

Problem 2. Let ABC be a triangle such that $\widehat{BAC} = 60°$. Points M, N and K lie on sides $[BC]$, $[AC]$ and $[AB]$ respectively, such that :

$$BK = KM = MN = NC, \quad AN = 2AK$$

- Determine the measure of each of the angles $\widehat{ABC}$ and $\widehat{ACB}$.

المسألة 2. ليكن ABC مثلثاً بحيث $\widehat{BAC} = 60°$. تقع النقط M و N و K على الأضلاع $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$ على الترتيب، بحيث:

$$BK = KM = MN = NC, \quad AN = 2AK.$$

- حدّد قياس كل من الزاويتين $\widehat{ABC}$ و $\widehat{ACB}$.

Problème 3. Considérons l'équation (E) à trois inconnues x, y et z dans $\mathbb{N}$:

$$(E) : x^2 + y^2 = 3 \cdot (2023)^z + 77$$

(1) Pour $x, y \in \mathbb{N}$, montrer que si 4 divise $x^2 + y^2$ alors 4 divise x^2 et y^2.

(2) Pour $x, y \in \mathbb{N}$, montrer que si 7 divise $x^2 + y^2$ alors 7 divise x et y.

(3) Déterminer tous les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ solutions de l'équation (E).

Problem 3. Consider the equation (E) in three unknowns x, y and z in $\mathbb{N}$:

$$(E) : x^2 + y^2 = 3 \cdot (2023)^z + 77$$

(1) For $x, y \in \mathbb{N}$, show that if 4 divides $x^2 + y^2$ then 4 divides both x^2 and y^2.

(2) For $x, y \in \mathbb{N}$, show that if 7 divides $x^2 + y^2$ then 7 divides both x and y.

(3) Find all triples $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ that are solutions of equation (E).

المسألة 3. نعتبر المعادلة (E) بثلاثة مجاهيل x و y و z في $\mathbb{N}$:

$$(E) : x^2 + y^2 = 3 \cdot (2023)^z + 77$$

(1) للعددين $x, y \in \mathbb{N}$، أثبت أنه إذا قسّم 4 المقدارَ $x^2 + y^2$ فإن 4 يقسّم x^2 و y^2.

(2) للعددين $x, y \in \mathbb{N}$، أثبت أنه إذا قسّم 7 المقدارَ $x^2 + y^2$ فإن 7 يقسّم x و y.

(3) أوجد جميع الثلاثيات $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ الحلول للمعادلة (E).

Version réécrite par Saad Choukri