المستوى. الجذع المشترك	تاريخ التمرير. الجمعة 30 أبريل 2021	مدة الإنجاز. ثلاث ساعات

ملاحظات هامة:

- هذه نسخة من النسخة الأصلية المكتوبة من قبل الكاتب. ومع ذلك، قد تحتوي على أخطاء محتملة في الكتابة.
- يدون المترشح على ورقة تحريره إسمه و نسبه (بالحروف العربية و اللاتينية)، تاريخ ميلاده، إسم مؤسسته و إسم المديرية.
- يمكن للمترشح تحرير أجوبته بإحدى اللغات الثلاثة، حسب الإختيار الذي يناسبه.

Sujet		الموضوع

Problème 1. Considérons un triangle ABC à angles aigus et (Γ) son cercle circonscrit. Soit F le point d'intersection des tangentes au cercle (Γ) aux points B et C. Les points M, L et N sont les projections orthogonales du point A sur les droites (FB), (FC) et (BC) respectivement.

- Prouver que $AM + AL \geq 2AN$.

Problem 1. Consider an acute triangle ABC and (Γ) its circumscribed circle. Let F be the intersection point of the tangents to circle (Γ) at points B and C. Points M, L and N are the orthogonal projections of point A onto lines (FB), (FC) and (BC) respectively.

- Prove that $AM + AL \geq 2AN$.

المسألة 1. نعتبر مثلثاً ABC زوايا حادة و(Γ) دائرته المحيطة. لتكن F نقطة تقاطع المماسين للدائرة (Γ) في النقطتين B و C. النقط M و L و N هي المساقط العمودية للنقطة A على المستقيمات (FB) و (FC) و (BC) بالتوالي.

- أثبت أن $AM + AL \geq 2AN$.

Problème 2. Soient a et b deux nombres réels strictement positifs vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) le polynôme

$$P(x) = x^3 + ax^2 + 2bx - 1$$

a trois racines réelles distinctes u, v et w ;

(ii) le polynôme $Q(x) = 2x^2 + 2bx + a$ n'a pas de racines réelles.

(1) Prouver que $a^2 - 4b = u^2 + v^2 + w^2$.

(2) Montrer que $a^2 - 4b > 3$ et en déduire que $a - b > 1$.

- On rappelle que

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 > xyz$$

pour tous nombres réels strictement positifs et distincts x, y et z.

Problem 2. Let a and b be two strictly positive real numbers satisfying the following two conditions :

(i) the polynomial

$$P(x) = x^3 + ax^2 + 2bx - 1$$

has three distinct real roots u, v and w ;

(ii) the polynomial $Q(x) = 2x^2 + 2bx + a$ has no real roots.

(1) Prove that $a^2 - 4b = u^2 + v^2 + w^2$.

(2) Show that $a^2 - 4b > 3$ and deduce that $a - b > 1$.

- Recall that

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 > xyz$$

for all strictly positive and distinct real numbers x, y and z.

المسألة 2. ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين قطعاً ويحققان الشرطين التاليين:

(i) الحدودية

$$P(x) = x^3 + ax^2 + 2bx - 1$$

لها ثلاثة جذور حقيقية مختلفة u و v و w؛

(ii) الحدودية $Q(x) = 2x^2 + 2bx + a$ ليس لها جذور حقيقية.

(1) أثبت أن $a^2 - 4b = u^2 + v^2 + w^2$.

(2) بيّن أن $a^2 - 4b > 3$ ثم استنتج أن $a - b > 1$.

- تذكر أن

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 > xyz$$

لكل أعداد حقيقية موجبة قطعاً ومختلفة x و y و z.

Problème 3. Une famille se compose du père, de la mère et de n enfants, où $n \in \mathbb{N}$. Soit X le nombre d'enfants dans cette famille qui peuvent avoir à la fois un frère et une sœur.

- Trouver toutes les valeurs possibles du nombre X.

Problem 3. A family consists of a father, a mother and n children, where $n \in \mathbb{N}$. Let X be the number of children in this family who can have both a brother and a sister.

- Find all possible values of the number X.

المسألة 3. تتكون أسرة من الأب والأم و n من الأطفال، حيث $n \in \mathbb{N}$. ليكن X عدد الأطفال في هذه العائلة الذين يمكن أن يكون لهم أخ وأخت.

- أوجد جميع القيم الممكنة للعدد X.