المستوى. الأولى بكالوريا علوم رياضية	تاريخ التمرير. الجمعة 3 فبراير 2023	مدة الإنجاز. ثلاث ساعات

ملاحظات هامة:

- هذه نسخة من النسخة الأصلية المكتوبة من قبل الكاتب. ومع ذلك، قد تحتوي على أخطاء محتملة في الكتابة.
- يدون المترشح على ورقة تحريره إسمه و نسبه (بالحروف العربية و اللاتينية)، تاريخ ميلاده، إسم مؤسسته و إسم المديرية.
- يمكن للمترشح تحرير أجوبته بإحدى اللغات الثلاثة، حسب الإختيار الذي يناسبه.

الموضوع	Sujet	

المسألة 1. ليكن $a, b \in \mathbb{R}$ بحيث $at + b \in [-1, 1]$، لكل $t \in [-1, 1]$.

- أثبت أن $|a^2 + ab + 2b| \leq 2$ ثم أوجد a و b بحيث

$$|a^2 + ab + 2b| = 2$$

PROBLEM 1. Let $a, b \in \mathbb{R}$ such that $at + b \in [-1, 1]$, for all $t \in [-1, 1]$.

- Show that $|a^2 + ab + 2b| \leq 2$ and then find a and b such that

$$|a^2 + ab + 2b| = 2$$

PROBLÈME 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $at + b \in [-1, 1]$, pour tout $t \in [-1, 1]$.

- Montrer que $|a^2 + ab + 2b| \leq 2$ puis trouver a et b tels que

$$|a^2 + ab + 2b| = 2$$

المسألة 2. ليكن A مجموعة تحتوي على 2023 عنصراً.

- كم عدد الطرق الممكنة لاختيار مجموعتين جزئيتين من A (ليستا بالضرورة مختلفتين) بحيث يكون اتحادهما مساوياً للمجموعة A؟

PROBLEM 2. Let A be a set containing 2023 elements.

- How many ways are there to choose two subsets of A (not necessarily distinct) whose union is equal to the set A?

PROBLÈME 2. Soit A un ensemble contenant 2023 éléments.

- Combien existe t-il de façons de choisir deux sous-ensemble de A (non nécessairement distincts) dont l'union soit égal à l'ensemble A ?

المسألة 3. ليكن A، C، B و D أربع نقاط متوافقة بهذا الترتيب. الدائرتان $(\mathcal{C}_1)$ و $(\mathcal{C}_2)$ ذواتا القطرين $[AB]$ و $[CD]$ على التوالي تتقاطعان عند النقطتين M و N. لتكن E نقطة على القطعة $[MN]$. المستقيم (CE) يقطع الدائرة $(\mathcal{C}_2)$ مرة ثانية في F والمستقيم (BE) يقطع الدائرة $(\mathcal{C}_1)$ مرة ثانية في G.

- أثبت أن المستقيمات (AG)، (MN) و (FD) متقاطعة في نقطة واحدة.

PROBLEM 3. Let A, C, B and D be four collinear points in this order. The circles $(\mathcal{C}_1)$ and $(\mathcal{C}_2)$ with diameters $[AB]$ and $[CD]$ respectively intersect at points M and N. Let E be a point on the segment $[MN]$. The line (CE) meets the circle $(\mathcal{C}_2)$ again at F and the line (BE) meets the circle $(\mathcal{C}_1)$ again at G.

- Show that the lines (AG), (MN) and (FD) are concurrent.

PROBLÈME 3. Soient A, C, B et D quatre points alignés dans cet ordre. Les cercles $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ de diamètres $[AB]$ et $[CD]$ respectivement se coupent aux points M et N. Soit E un point du segment $[MN]$. La droite (CE) coupe une deuxième fois le cercle $(\mathcal{C}_2)$ en F et la droite (BE) coupe une deuxième fois le cercle $(\mathcal{C}_1)$ en G.

- Montrer que les droites (AG), (MN) et (FD) sont concourantes.

المسألة 4. حدد جميع الأعداد الصحيحة $n \geq 2$ التي تقبل قاسماً $\ell \geq 1$ بحيث

$$n = p^3 + \ell^3$$

حيث p هو أصغر قاسم للعدد n أكبر من أو يساوي 2.

PROBLEM 4. Determine all integers $n \geq 2$ that admit a divisor $\ell \geq 1$ such that

$$n = p^3 + \ell^3$$

where p is the smallest divisor of n greater than or equal to 2.

PROBLÈME 4. Déterminer tous les nombres entiers $n \geq 2$ qui admettent un diviseur $\ell \geq 1$ tel que

$$n = p^3 + \ell^3$$

où p est le plus petit diviseur du nombre n supérieur ou égal à 2.

Version réécrite par Saad Choukri