المستوى. الأولى بكالوريا علوم رياضية | تاريخ التمرير. الجمعة 9 فبراير 2018 | مدة الإنجاز. ثلاث ساعات ونصف

ملاحظات هامة:

- هذه نسخة من النسخة الأصلية المكتوبة من قبل الكاتب. ومع ذلك، قد تحتوي على أخطاء محتملة في الكتابة.
- يدون المترشح على ورقة تحريره إسمه و نسبه (بالحروف العربية و اللاتينية)، تاريخ ميلاده، إسم مؤسسته و إسم المديرية.
- يمكن للمترشح تحرير أجوبته بإحدى اللغات الثلاثة، حسب الإختيار الذي يناسبه.

الموضوع | Sujet

المسألة 1.

(1) ليكن n عدداً صحيحاً طبيعياً غير منعدم. بسط التعبير التالي:

$$A=\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{81}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3^{2^n}}\right).$$

(2) ليكن x عدداً حقيقياً من $]0,\frac{2}{3}[$.
بيّن أنه يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم n حيث

$$\{nx\}\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right[$$

مع $\{nx\}=nx-[nx]$ و $[nx]$ هو الجزء الصحيح للعدد nx.

المسألة 2. نعتبر دائرتين $(\mathcal{C}_1)$ و $(\mathcal{C}_2)$ متماستين خارجياً في نقطة T. ليكن (D) مستقيماً مماساً مشتركاً للدائرتين $(\mathcal{C}_1)$ و $(\mathcal{C}_2)$ في نقطتين T' و S على التوالي.

(1) بيّن أن $TT'S$ مثلث قائم الزاوية في النقطة T.

(2) ليكن (Δ) مستقيماً مماساً للدائرة $(\mathcal{C}_2)$ في نقطة T'' وموازياً للمستقيم (ST').
بيّن أن النقط T و T' و T'' مستقيمية.

المسألة 3. نعتبر مجموعة ثابتة E من 2017^{2019} نقطة من المستوى.
• أثبت أنه توجد دائرة من المستوى، يحتوي داخلها على 2018 نقطة، بالضبط، من المجموعة E (هذه النقط لا تنتمي إلى هذه الدائرة).

Problem 1.

(1) Let n be a non-zero natural number. Simplify the following expression :

$$A=\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{81}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3^{2^n}}\right).$$

(2) Let x be a real number in $]0,\frac{2}{3}[$.
Show that there exists a non-zero natural number n such that

$$\{nx\}\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right[$$

where $\{nx\}=nx-[nx]$ and $[nx]$ is the integer part of the number nx.

Problem 2. Consider two circles $(\mathcal{C}_1)$ and $(\mathcal{C}_2)$ externally tangent at a point T. Let (D) be a common tangent line to $(\mathcal{C}_1)$ and $(\mathcal{C}_2)$, touching them at the points T' and S respectively.

(1) Show that $TT'S$ is a right triangle at T.

(2) Let (Δ) be a line tangent to $(\mathcal{C}_2)$ at a point T'' and parallel to the line (ST').
Show that the points T, T' and T'' are collinear.

Problem 3. Consider a fixed set E of 2017^{2019} points of the plane.
• Prove that there exists a circle in the plane inside which there are exactly 2018 points of E (these points do not lie on the circle).

Problème 1.

(1) Soit n un entier naturel non nul. Simplifier l'expression suivante :

$$A=\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{81}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3^{2^n}}\right).$$

(2) Soit x un nombre réel de $]0,\frac{2}{3}[$.
Montrer qu'il existe un entier naturel non nul n tel que

$$\{nx\}\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right[$$

avec $\{nx\}=nx-[nx]$ et $[nx]$ est la partie entière du nombre nx.

Problème 2. On considère deux cercles $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ tangents extérieurement en un point T. Soit (D) une droite tangente commune aux cercles $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ respectivement aux points T' et S.

(1) Montrer que $TT'S$ est un triangle rectangle au point T.

(2) Soit (Δ) une droite tangente au cercle $(\mathcal{C}_2)$ en un point T'' et parallèle à la droite (ST').
Montrer que les points T, T' et T'' sont alignés.

Problème 3. On considère un ensemble fixé E de 2017^{2019} points du plan.
• Prouver qu'il existe un cercle du plan, à l'intérieur duquel on a exactement 2018 points de l'ensemble E (ces points n'appartiennent pas à ce cercle).

Version réécrite par Saad Choukri