المستوى. الأولى بكالوريا علوم رياضية | تاريخ التمرير. الجمعة 22 دجنبر 2017 | مدة الإنجاز. ثلاث ساعات ونصف

ملاحظات هامة:

- هذه نسخة من النسخة الأصلية المكتوبة من قبل الكاتب. ومع ذلك، قد تحتوي على أخطاء محتملة في الكتابة.
- يدون المترشح على ورقة تحريره إسمه و نسبه (بالحروف العربية و اللاتينية)، تاريخ ميلاده، إسم مؤسسته و إسم المديرية.
- يمكن للمترشح تحرير أجوبته بإحدى اللغات الثلاثة، حسب الإختيار الذي يناسبه.

الموضوع | Sujet

المسألة 1. ليكن ABC مثلثاً و $(\mathcal{C})$ دائرته المحيطة. نعتبر نقطة E من المماس (T) للدائرة $(\mathcal{C})$ في النقطة A. النقطتان P و Q هما على التوالي المسقطان العموديان للنقطة E على المستقيمين (AB) و (AC).

(1) بيّن أن المستقيمين (PQ) و (BC) متعامدان.

(2) المماس (T) والمنصف الداخلي للزاوية $\widehat{BAC}$ يقطعان المستقيم (BC) في النقطتين F و D على التوالي.
بيّن أن $FD = FA$.

المسألة 2. ليكن N عدداً صحيحاً طبيعياً و x_1 و x_2 و ... و x_{2N+2} أعداداً حقيقية من المجال $[-N, N+1]$ حيث $x_k \notin \mathbb{Z}$ لكل k من المجموعة $\{1, 2, \ldots, 2N+2\}$.

(1) أثبت أن:

$$-2N(N+1) \leq \sum_{i=1}^{2N+2} [x_i] \leq 2N(N+1).$$

(2) بيّن أنه يوجد i و j من المجموعة $\{1, 2, \ldots, 2N+2\}$، مع $i \neq j$، بحيث $[|x_i - x_j|] = 0$.

تذكير: الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x، الذي يرمز له بالرمز $[x]$، هو العدد الصحيح النسبي الوحيد p الذي يحقق: $p \leq x < p+1$.

المسألة 3. لتكن x و y و z و a و b و c أعداداً حقيقية تحقق:

$$a + x \geq b + y \geq c + z \geq 0,$$

و $a + b + c = x + y + z$.

• أثبت أن: $ay + bx \geq ac + xz$.

Problem 1. Let ABC be a triangle and $(\mathcal{C})$ its circumcircle. Consider a point E on the tangent (T) to $(\mathcal{C})$ at A. The points P and Q are the orthogonal projections of E onto the lines (AB) and (AC) respectively.

(1) Show that the lines (PQ) and (BC) are perpendicular.

(2) The tangent (T) and the internal bisector of the angle $\widehat{BAC}$ meet the line (BC) at the points F and D respectively.
Show that $FD = FA$.

Problem 2. Let N be a natural number and $x_1, x_2, \ldots, x_{2N+2}$ real numbers in the interval $[-N, N+1]$ such that $x_k \notin \mathbb{Z}$ for every k in the set $\{1, 2, \ldots, 2N+2\}$.

(1) Prove that :

$$-2N(N+1) \leq \sum_{i=1}^{2N+2} [x_i] \leq 2N(N+1).$$

(2) Show that there exist i and j in the set $\{1, 2, \ldots, 2N+2\}$, with $i \neq j$, such that $[|x_i - x_j|] = 0$.

Reminder : the integer part of the real number x, denoted $[x]$, is the unique integer p such that $p \leq x < p+1$.

Problem 3. Let x, y, z, a, b and c be real numbers satisfying :

$$a + x \geq b + y \geq c + z \geq 0,$$

and $a + b + c = x + y + z$.
• Prove that : $ay + bx \geq ac + xz$.

Problème 1. Soient ABC un triangle et $(\mathcal{C})$ son cercle circonscrit. On considère un point E de la tangente (T) au cercle $(\mathcal{C})$ au point A. Les points P et Q sont respectivement les projections orthogonales du point E sur les droites (AB) et (AC).

(1) Montrer que les droites (PQ) et (BC) sont perpendiculaires.

(2) La tangente (T) et la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ coupent la droite (BC) respectivement aux points F et D.
Montrer que $FD = FA$.

Problème 2. Soient N un nombre entier naturel et $x_1, x_2, \ldots, x_{2N+2}$ des nombres réels de l'intervalle $[-N, N+1]$ tels que $x_k \notin \mathbb{Z}$ pour tout k de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 2N+2\}$.

(1) Prouver que :

$$-2N(N+1) \leq \sum_{i=1}^{2N+2} [x_i] \leq 2N(N+1).$$

(2) Montrer qu'il existe i et j de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 2N+2\}$, avec $i \neq j$, tels que $[|x_i - x_j|] = 0$.

Rappel : la partie entière du nombre réel x, notée $[x]$, est l'unique entier relatif p qui vérifie : $p \leq x < p+1$.

Problème 3. Soient x, y, z, a, b et c des nombres réels qui vérifient :

$$a + x \geq b + y \geq c + z \geq 0,$$

et $a + b + c = x + y + z$.
• Prouver que : $ay + bx \geq ac + xz$.

Version réécrite par Saad Choukri