بسم الله الرحمن الرحيم

Professeur, Saad Choukri
Terminale SM

الأستاذ، سعد شكري
باكالوريا علوم رياضية

الموضوع 6 في البنيات الجبرية. حلقات وفضاءات متجهية لمصفوفات

ملخص، ندرس في الجزء الأول المجموعة $E = \{\alpha I + \beta A$ المولدة بمصفوفة A من الرتبة 2 تحقق $A^2 = A - I$، فنبين أنها فضاء متجهي حقيقي بعده 2 وجسم تبادلي، ونحل فيها المعادلة $X^2 = I$. وفي الجزء الثاني ندرس المصفوفات المربعة التي مربعها منعدم، ونستعملها لحساب قوى مصفوفة ومجموع متتالية هندسية من المصفوفات.

الجزء I

نعتبر $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 مزودة بقانون جمع المصفوفات $(+)$ وقانون ضرب مصفوفة في عدد حقيقي $(\cdot)$ وقانون ضرب المصفوفات $(\times)$. لتكن I المصفوفة الوحدة، $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. نعتبر المصفوفة، $A = \begin{pmatrix} a & a^2 - a + 1 \\ -1 & 1 - a \end{pmatrix}$ حيث a عدد حقيقي معلوم. نعتبر المجموعة، $E = \{\alpha I + \beta A \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.

(1) (a) بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

(b) بين أن الأسرة $\mathcal{B} = (I, A)$ أساس للفضاء المتجهي $(E, +, \cdot)$.

(2) (a) تحقق أن، $A^2 = A - I$.

(b) استنتج أن المصفوفة A تقبل مقلوبا وأن A^{-1} عنصر من E.

(3) (a) بين أن $(E, +, \times)$ حلقة واحدية تبادلية.

(b) بين أن كل عنصر M من E مخالف للمصفوفة المنعدمة يقبل مقلوبا وأن M^{-1} عنصر من E، محددا زوج إحداثيتيه بالنسبة للأساس $\mathcal{B}$.

(c) استنتج أن $(E, +, \times)$ جسم تبادلي.

(4) حل في المجموعة E المعادلة، $X^2 = I$.

الجزء II

نعتبر المجموعة الآتية، $\xi = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid M^2 = O_2\}$ حيث، $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$، ونضع، $I = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) ليكن A' عنصرا من ξ بحيث $A' \neq O_2$ و $A' \neq I$. بين أن (I, A') أسرة حرة.

(2) نضع، $\mathcal{F} = \{\lambda I + \mu A' \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$. بين أن، $(\forall (B, C) \in \mathcal{F}^2) \quad B \times C \in \mathcal{F}$.

(3) ليكن، $B = I + A'$ حيث $A' \in \xi$.

(a) • احسب B^n بدلالة I و A' و n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

• استنتج المجموع $T_n = I + B + B^2 + \cdots + B^n$ بدلالة I و A' و n.

(b) احسب المجموع T_n من أجل $B = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$ (بعد التحقق من أن $B = I + A'$ مع $A' \in \xi$ و $A' \neq O_2$).

ملحوظة، الجزءان I و II مستقلان.

Sujet d'étude 6 en Structures algébriques. Anneaux et espaces vectoriels de matrices

Résumé, La première partie étudie l'ensemble $E = \{\alpha I + \beta A\}$ engendré par une matrice A d'ordre 2 vérifiant $A^2 = A - I$; on montre que c'est un espace vectoriel réel de dimension 2 et un corps commutatif, et on y résout l'équation $X^2 = I$. La seconde partie étudie les matrices carrées de carré nul et les utilise pour calculer les puissances d'une matrice et la somme d'une suite géométrique de matrices.

Partie I

On considère l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2, muni de l'addition des matrices $(+)$, de la multiplication d'une matrice par un réel $(\cdot)$ et de la multiplication des matrices $(\times)$. Soit I la matrice unité, $\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère la matrice, $\quad A = \begin{pmatrix} a & a^2 - a + 1 \\ -1 & 1 - a \end{pmatrix}$ où a est un réel donné.

On considère l'ensemble, $\quad E = \left\{\alpha I + \beta A \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

(1) (a) Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

(b) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (I, A)$ est une base de l'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$.

(2) (a) Vérifier que, $\quad A^2 = A - I$.

(b) En déduire que la matrice A est inversible et que A^{-1} est un élément de E.

(3) (a) Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau unitaire commutatif.

(b) Montrer que tout élément M de E différent de la matrice nulle est inversible et que M^{-1} appartient à E, en précisant le couple de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

(c) En déduire que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.

(4) Résoudre dans l'ensemble E l'équation, $\quad X^2 = I$.

Partie II

On considère l'ensemble, $\xi = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid M^2 = O_2\}$, où, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et on pose, $I = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Soit A' un élément de ξ tel que $A' \neq O_2$ et $A' \neq I$. Montrer que (I, A') est une famille libre.

(2) On pose, $\mathcal{F} = \{\lambda I + \mu A' \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que, $\big(\forall (B, C) \in \mathcal{F}^2\big) \quad B \times C \in \mathcal{F}$.

(3) Soit, $B = I + A'$ où $A' \in \xi$.

(a)
- Calculer B^n en fonction de I, A' et n ($n \in \mathbb{N}^*$).
- En déduire la somme $T_n = I + B + B^2 + \cdots + B^n$ en fonction de I, A' et n.

(b) Calculer la somme T_n pour $B = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$ (après avoir vérifié que $B = I + A'$ avec $A' \in \xi$ et $A' \neq O_2$).

Remarque, les parties I et II sont indépendantes.

Study Topic 6 in Algebraic Structures. Rings and Vector Spaces of Matrices

Summary, The first part studies the set $E = \{\alpha I + \beta A\}$ generated by a 2×2 matrix A satisfying $A^2 = A - I$; we show that it is a two-dimensional real vector space and a commutative field, and solve the equation $X^2 = I$ in it. The second part studies square matrices whose square is zero and uses them to compute the powers of a matrix and the sum of a geometric sequence of matrices.

Part I

Consider the set $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ of 2×2 square matrices, equipped with matrix addition $(+)$, multiplication of a matrix by a real number $(\cdot)$ and matrix multiplication $(\times)$. Let I be the identity matrix, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Consider the matrix, $A = \begin{pmatrix} a & a^2 - a + 1 \\ -1 & 1 - a \end{pmatrix}$ where a is a given real number. Consider the set, $E = \left\{\alpha I + \beta A \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

(1) (a) Show that $(E, +, \cdot)$ is a real vector space.

(b) Show that the family $\mathcal{B} = (I, A)$ is a basis of the vector space $(E, +, \cdot)$.

(2) (a) Check that, $A^2 = A - I$.

(b) Deduce that the matrix A is invertible and that A^{-1} is an element of E.

(3) (a) Show that $(E, +, \times)$ is a commutative unital ring.

(b) Show that every element M of E other than the zero matrix is invertible and that M^{-1} belongs to E, giving its pair of coordinates in the basis $\mathcal{B}$.

(c) Deduce that $(E, +, \times)$ is a commutative field.

(4) Solve the equation, $X^2 = I$ in the set E.

Part II

Consider the set, $\xi = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid M^2 = O_2\}$, where, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, and set, $I = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Let A' be an element of ξ such that $A' \neq O_2$ and $A' \neq I$. Show that (I, A') is a linearly independent family.

(2) Set, $\mathcal{F} = \{\lambda I + \mu A' \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$. Show that, $\big(\forall (B, C) \in \mathcal{F}^2\big)$ $B \times C \in \mathcal{F}$.

(3) Let, $B = I + A'$ where $A' \in \xi$.

(a)
- Compute B^n in terms of I, A' and n ($n \in \mathbb{N}^*$).
- Deduce the sum $T_n = I + B + B^2 + \cdots + B^n$ in terms of I, A' and n.

(b) Compute the sum T_n for $B = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$ (after checking that $B = I + A'$ with $A' \in \xi$ and $A' \neq O_2$).

Remark, Parts I and II are independent.