بسم الله الرحمن الرحيم

Professeur, Saad Choukri
Terminale SM

الأستاذ، سعد شكري
باكالوريا علوم رياضية

الموضوع 5 في البنيات الجبرية. دراسة مجموعة ضمن حلقة

ملخص، ندرس في حلقة واحدية A مجموعة العناصر المتساوية القوى $B = \{x \in A \mid x^2 = x\}$. نبين أنها غير فارغة، ونحددها في حالة حلقة كاملة، ثم نستعمل التطبيق $a \mapsto 1 - a$ لنستنتج أن عدد عناصرها زوجي عندما تكون منتهية، ونختم بإثبات استقرارها بالنسبة للضرب في حالة حلقة تبادلية.

لتكن $(A, +, \times)$ حلقة واحدية، وحدتها 1 وصفرها 0 و $\operatorname{Card} A \geqslant 2$. نعتبر المجموعة B المعرفة بما يلي،

$$B = \{x \in A \mid x^2 = x\}.$$

(1) بين أن، $B \neq \varnothing$.

(2) بين أنه إذا كانت الحلقة A كاملة، فإن، $B = \{0, 1\}$.

(3) (a) ليكن a من B. بين أن، $1 - a \neq a$ و $1 - a \in B$.

(b) استنتج أنه إذا كانت B مجموعة منتهية فإن رئيسيها عدد زوجي.

(4) نفترض أن الحلقة A تبادلية. بين أن B جزء مستقر من $(A, \times)$.

Sujet d'étude 5 en Structures algébriques. Étude d'un ensemble dans un anneau

Résumé, Dans un anneau unitaire A, on étudie l'ensemble des éléments idempotents $B = \{x \in A \mid x^2 = x\}$. On montre qu'il est non vide, on le détermine dans le cas d'un anneau intègre, puis on utilise l'application $a \mapsto 1 - a$ pour en déduire que son cardinal est pair lorsqu'il est fini. On termine en montrant sa stabilité pour la multiplication lorsque l'anneau est commutatif.

Soit $(A, +, \times)$ un anneau unitaire, d'unité 1 et de zéro 0, avec $\operatorname{Card} A \geqslant 2$. On considère l'ensemble B défini par

$$B = \{x \in A \mid x^2 = x\}.$$

(1) Montrer que, $B \neq \varnothing$.

(2) Montrer que si l'anneau A est intègre, alors, $B = \{0, 1\}$.

(3) (a) Soit $a \in B$. Montrer que, $1 - a \neq a$ et $1 - a \in B$.

(b) En déduire que si B est un ensemble fini, alors son cardinal est pair.

(4) On suppose que l'anneau A est commutatif. Montrer que B est une partie stable de $(A, \times)$.

Study Topic 5 in Algebraic Structures.
Studying a Subset of a Ring

Summary, In a unital ring A, we study the set of idempotent elements $B = \{x \in A \mid x^2 = x\}$. We show that it is non-empty, determine it when the ring is an integral domain, then use the map $a \mapsto 1 - a$ to deduce that its cardinality is even when it is finite. We finish by proving that it is closed under multiplication when the ring is commutative.

Let $(A, +, \times)$ be a unital ring, with unit 1 and zero 0, such that $\operatorname{Card} A \geqslant 2$. Consider the set B defined by

$$B = \{x \in A \mid x^2 = x\}.$$

(1) Show that, $B \neq \varnothing$.

(2) Show that if the ring A is an integral domain, then, $B = \{0, 1\}$.

(3) (a) Let $a \in B$. Show that, $1 - a \neq a$ and $1 - a \in B$.

(b) Deduce that if B is a finite set, then its cardinality is even.

(4) Assume that the ring A is commutative. Show that B is a stable subset of $(A, \times)$.