بسم الله الرحمن الرحيم

Professeur, Saad Choukri
Terminale SM

الأستاذ، سعد شكري
باكالوريا علوم رياضية

الموضوع 4 في البنيات الجبرية. زمرة جزئية من $\mathbb{C}$

ملخص، نعتبر زمرة جزئية G من $(\mathbb{C},+)$ تحتوي على جميع الأعداد $x+ix^2$ حيث $x\in[0,1]$. بواسطة تأليفات خطية مناسبة لهذه العناصر نبين تدريجيا أن G تحتوي على مجال من الأعداد الحقيقية، ثم على $\mathbb{R}$ كلها، ثم على المحور التخيلي، لنستنتج أن $G=\mathbb{C}$.

لتكن $(G,+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{C},+)$ بحيث،

$$(\forall x\in[0,1]) \qquad x+ix^2\in G.$$

(1) بين أن، $(2x-1)(1+i)\in G \quad (\forall x\in[0,1])$.

(2) استنتج أن، $x+ix\in G \quad (\forall x\in[0,1])$.

(3) بين أن، $x-x^2\in G \quad (\forall x\in[0,1])$.

(4) استنتج أن، $\left[0,\frac{1}{4}\right]\subset G$.

(5) بين أن، $x=ny \quad (\forall x\in\mathbb{R})(\exists n\in\mathbb{Z})\left(\exists y\in\left[0,\frac{1}{4}\right]\right)$.

(6) استنتج أن، $\mathbb{R}\subset G$.

(7) بين أن، $i(x-x^2)\in G \quad (\forall x\in[0,1])$.

(8) بين أن، $G=\mathbb{C}$.

Sujet d'étude 4 en Structures algébriques. Un sous-groupe de $\mathbb{C}$

Résumé, On considère un sous-groupe G de $(\mathbb{C},+)$ contenant tous les nombres $x+ix^2$ pour $x\in[0,1]$. À l'aide de combinaisons convenables de ces éléments, on montre progressivement que G contient un intervalle de réels, puis $\mathbb{R}$ tout entier, puis l'axe imaginaire, et on en déduit que $G=\mathbb{C}$.

Soit $(G,+)$ un sous-groupe de $(\mathbb{C},+)$ tel que

$$(\forall x\in[0,1]) \qquad x+ix^2\in G.$$

(1) Montrer que, $(\forall x\in[0,1])\quad (2x-1)(1+i)\in G.$

(2) En déduire que, $(\forall x\in[0,1])\quad x+ix\in G.$

(3) Montrer que, $(\forall x\in[0,1])\quad x-x^2\in G.$

(4) En déduire que, $\left[0,\dfrac{1}{4}\right]\subset G.$

(5) Montrer que, $(\forall x\in\mathbb{R})(\exists n\in\mathbb{Z})\left(\exists y\in\left[0,\tfrac{1}{4}\right]\right)\quad x=ny.$

(6) En déduire que, $\mathbb{R}\subset G.$

(7) Montrer que, $(\forall x\in[0,1])\quad i(x-x^2)\in G.$

(8) Montrer que, $G=\mathbb{C}.$

Study Topic 4 in Algebraic Structures. A Subgroup of $\mathbb{C}$

Summary, We consider a subgroup G of $(\mathbb{C},+)$ containing all the numbers $x+ix^2$ for $x\in[0,1]$. Using suitable combinations of these elements, we gradually show that G contains an interval of real numbers, then the whole of $\mathbb{R}$, then the imaginary axis, and deduce that $G=\mathbb{C}$.

Let $(G,+)$ be a subgroup of $(\mathbb{C},+)$ such that

$$(\forall x\in[0,1]) \qquad x+ix^2\in G.$$

(1) Show that, $(\forall x\in[0,1])\quad (2x-1)(1+i)\in G.$

(2) Deduce that, $(\forall x\in[0,1])\quad x+ix\in G.$

(3) Show that, $(\forall x\in[0,1])\quad x-x^2\in G.$

(4) Deduce that, $\left[0,\dfrac{1}{4}\right]\subset G.$

(5) Show that, $(\forall x\in\mathbb{R})(\exists n\in\mathbb{Z})\left(\exists y\in\left[0,\tfrac{1}{4}\right]\right)\quad x=ny.$

(6) Deduce that, $\mathbb{R}\subset G.$

(7) Show that, $(\forall x\in[0,1])\quad i(x-x^2)\in G.$

(8) Show that, $G=\mathbb{C}.$