بسم الله الرحمن الرحيم

Professeur, Saad Choukri — **الأستاذ، سعد شكري**

Terminale SM — **باكالوريا علوم رياضية**

الموضوع 2 في البنيات الجبرية. زمرة منتهية

ملخص، نعتبر زمرة منتهية رتبتها $2n$ تحتوي على زمرتين جزئيتين مختلفتين رتبة كل منهما n وتقاطعهما مختزل في العنصر المحايد. بحساب عدد العناصر نبين أن الزمرة هي اتحاد الزمرتين الجزئيتين وعنصر إضافي وحيد، ثم ندرس جداء عنصرين منهما لنستنتج أن $n = 2$ ونحدد جدول القانون.

لتكن $(G, *)$ زمرة منتهية عنصرها المحايد e بحيث، $\operatorname{Card} G = 2n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$. نفترض أنه توجد زمرتان جزئيتان H و F تحققان ما يلي،

(i) $H \neq F$ و $H \cap F = \{e\}$،

(ii) $\operatorname{Card} H = \operatorname{Card} F = n$.

(1) بين أن، $G = H \cup F \cup \{\alpha\} \quad (\exists \alpha \in G)$.

(2) ليكن $b \in H \setminus \{e\}$ و $a \in F \setminus \{e\}$.

(a) بين أن، $a * b \notin H$ و $a * b \notin F$.

(b) استنتج أن، $a * b = \alpha$، ثم بين أن، $n = 2$.

(3) حدد جدول القانون $*$.

Sujet d'étude 2 en Structures algébriques. Un groupe fini

Résumé, On considère un groupe fini d'ordre $2n$ contenant deux sous-groupes distincts d'ordre n dont l'intersection est réduite à l'élément neutre. Un dénombrement montre que le groupe est la réunion de ces deux sous-groupes et d'un unique élément supplémentaire ; l'étude du produit d'éléments pris dans chacun d'eux permet d'en déduire que $n = 2$ et de dresser la table de la loi.

Soit $(G, *)$ un groupe fini d'élément neutre e tel que, $\operatorname{Card} G = 2n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$. On suppose qu'il existe deux sous-groupes H et F vérifiant

(i) $H \neq F \quad$ et $\quad H \cap F = \{e\}$,

(ii) $\operatorname{Card} H = \operatorname{Card} F = n$.

(1) Montrer que, $\quad (\exists \alpha \in G) \quad G = H \cup F \cup \{\alpha\}$.

(2) Soient $b \in H \setminus \{e\}$ et $a \in F \setminus \{e\}$.

(a) Montrer que, $\quad a * b \notin H \quad$ et $\quad a * b \notin F$.

(b) En déduire que, $\quad a * b = \alpha$, puis montrer que, $\quad n = 2$.

(3) Dresser la table de la loi $*$.

Study Topic 2 in Algebraic Structures. A Finite Group

Summary, We consider a finite group of order $2n$ containing two distinct subgroups of order n whose intersection is reduced to the identity. A counting argument shows that the group is the union of these two subgroups and a single extra element; studying the product of elements taken from each of them leads to $n = 2$ and to the table of the law.

Let $(G, *)$ be a finite group with identity element e such that, $\operatorname{Card} G = 2n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Assume that there exist two subgroups H and F satisfying

(i) $H \neq F$ and $H \cap F = \{e\}$,

(ii) $\operatorname{Card} H = \operatorname{Card} F = n$.

(1) Show that, $(\exists \alpha \in G) \quad G = H \cup F \cup \{\alpha\}$.

(2) Let $b \in H \setminus \{e\}$ and $a \in F \setminus \{e\}$.

(a) Show that, $a * b \notin H$ and $a * b \notin F$.

(b) Deduce that, $a * b = \alpha$, then show that, $n = 2$.

(3) Draw up the table of the law $*$.