بسم الله الرحمن الرحيم

Professeur, Saad Choukri
Terminale SM

الأستاذ، سعد شكري
باكالوريا علوم رياضية

الموضوع 1 في البنيات الجبرية. خارج قانون تركيب داخلي على علاقة تكافؤ

ملخص، نعرف علاقة التكافؤ وأصناف التكافؤ والمجموعة الخارج $E/\mathcal{R}$، ثم ندرس شرط انسجام علاقة تكافؤ مع قانون تركيب داخلي الذي يمكن من تعريف القانون الخارج على $E/\mathcal{R}$. نطبق ذلك على القانون $x * y = ax + by$ في $\mathbb{Z}$ وعلى الموافقة بتردید n، وندرس خاصيات القانون الخارج في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

الجزء A

لتكن E مجموعة غير فارغة، وليكن $\mathcal{R}$ علاقة بين عناصر E. نقول إن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ في E إذا حققت الشروط الآتية،

(r)	$(\forall x \in E) \quad x \mathcal{R} x$	(خاصية الانعكاسية)
(s)	$(\forall (x,y) \in E^2) \quad x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$	(خاصية التماثلية)
(t)	$(\forall (x,y,z) \in E^3) \quad (x \mathcal{R} y \text{ و } y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$	(خاصية التعدي)

أو $\bar{x}$ بالرمز لها ويرمز x تكافؤ صنف تسمى $u \mathcal{R} x$ بحيث E من u العناصر مجموعة ،E من x لكل بالرمز $\operatorname{cl} x \pmod{\mathcal{R}}$، أي

$$\operatorname{cl} x \pmod{\mathcal{R}} = \bar{x} = \{u \in E \mid u \mathcal{R} x\}.$$

،$\mathcal{R}$ على E المجموعة خارج أي الخارج، المجموعة وتسمى $E/\mathcal{R}$ تكتب E عناصر تكافؤ أصناف مجموعة ولدينا

$$\alpha \in E/\mathcal{R} \iff (\exists x \in E)\ \alpha = \bar{x}.$$

α. التكافؤ لصنف ممثل x إن نقول ،$\alpha = \bar{x}$ كان إذا

(1) لتكن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ في E.

(a) بين أن، $(\forall (x,u,v) \in E^3) \quad (u \in \bar{x} \text{ و } v \in \bar{x}) \Rightarrow u \mathcal{R} v$.

(b) بين أن، $(\forall (x,y) \in E^2) \quad \bar{x} = \bar{y} \iff x \mathcal{R} y$.

(2) لتكن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ في E. نفترض في هذا السؤال أن E مزودة بقانون تركيب داخلي $*$، كما نفترض أن العلاقة $\mathcal{R}$ تحقق،

$$\big(\forall (x,y,z)\in E^3\big) \qquad x\,\mathcal{R}\,y \Rightarrow \begin{cases} (x*z)\,\mathcal{R}\,(y*z) \\ (z*x)\,\mathcal{R}\,(z*y) \end{cases}$$

نقول في هذه الحالة إن العلاقة $\mathcal{R}$ منسجمة مع القانون $*$.

(a) بين أن، $\big(\forall (x,y,u,v)\in E^4\big) \quad (x\,\mathcal{R}\,y \text{ و } u\,\mathcal{R}\,v) \Rightarrow (x*u)\,\mathcal{R}\,(y*v)$.

(b) ليكن α و β عنصرين من $E/\mathcal{R}$، بحيث $\alpha=\bar{x}$ و $\beta=\bar{y}$. بين أن $\overline{x*y}$ غير مرتبط بالممثلين x و y (بتعبير آخر، إذا كان $\alpha=\overline{x'}$ و $\beta=\overline{y'}$ فإن $\overline{x*y}=\overline{x'*y'}$). نضع إذن $\alpha \bar{*} \beta = \bar{x}\bar{*}\bar{y} = \overline{x*y}$، وبهذا نكون قد عرفنا القانون $\bar{*}$ في $E/\mathcal{R}$. يسمى القانون $\bar{*}$ القانون الخارج للقانون $*$ على العلاقة $\mathcal{R}$.

الجزء B

نعتبر عددين صحيحين نسبيين غير منعدمين a و b، وليكن في $\mathbb{Z}$ قانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي، $x*y=ax+by$.

(1) ليكن التطبيق،

$$\begin{aligned} \varphi:\ \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (x,y) &\longmapsto x*y \end{aligned}$$

(a) حدد $\varphi^{-1}(\{0\})$. هل φ تطبيق تباييني؟

(b) ما هو الشرط الذي ينبغي أن يحققه a و b بحيث يوجد (x_0,y_0) يحقق $\varphi(x_0,y_0)=1$؟ بين أنه إذا كان هذا الشرط محققا، فإن التطبيق φ يكون شموليا.

(2) ليكن $n\in\mathbb{N}$ و $n\geqslant 2$. بين أن الموافقة بتردد n منسجمة مع القانون $*$.

(3) يمكن إذن أن نعرف في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ القانون الداخلي $\bar{*}$ بما يلي، $\bar{x}\bar{*}\bar{y}=\overline{x*y}$. بين أن،

(a) $\bar{*}$ يكون تجميعيا إذا وفقط إذا كان، $a(a-1)\equiv 0\ [n]$ و $b(b-1)\equiv 0\ [n]$.

(b) $\bar{*}$ يكون تبادليا إذا وفقط إذا كان، $a\equiv b\ [n]$.

(c) لكي يوجد عنصر محايد بالنسبة للقانون $\bar{*}$ يلزم ويكفي، $a\equiv 1\ [n]$ و $b\equiv 1\ [n]$.

(4) نفترض أن، $a\equiv 1\ [n]$ و $b\equiv 1\ [n]$. بين أن $\bar{*}$ قانون تجميعي وتبادلي ويقبل عنصرا محايدا وكل عنصر في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ يقبل مماثلا بالنسبة للقانون الخارج $\bar{*}$.

Sujet d'étude 1 en Structures algébriques. Loi quotient d'une loi de composition interne par une relation d'équivalence

Résumé, On définit les relations d'équivalence, les classes d'équivalence et l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$, puis on étudie la condition de compatibilité d'une relation d'équivalence avec une loi de composition interne, qui permet de définir la loi quotient sur $E/\mathcal{R}$. On applique cela à la loi $x * y = ax + by$ sur $\mathbb{Z}$ et à la congruence modulo n, et on étudie les propriétés de la loi quotient dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Partie A

Soit E un ensemble non vide et soit $\mathcal{R}$ une relation entre les éléments de E. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans E si elle vérifie les conditions suivantes,

(r) $(\forall x \in E) \quad x \mathcal{R} x$ (réflexivité)

(s) $\big(\forall (x,y) \in E^2\big) \quad x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$ (symétrie)

(t) $\big(\forall (x,y,z) \in E^3\big) \quad (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$ (transitivité)

Pour tout $x \in E$, l'ensemble des éléments u de E tels que $u \mathcal{R} x$ est appelé classe d'équivalence de x et noté $\bar{x}$ (ou $\operatorname{cl} x \ (\operatorname{mod} \mathcal{R})$),

$$\operatorname{cl} x \ (\operatorname{mod} \mathcal{R}) = \bar{x} = \{u \in E \mid u \mathcal{R} x\}.$$

L'ensemble des classes d'équivalence des éléments de E se note $E/\mathcal{R}$ et s'appelle l'ensemble quotient (quotient de E par $\mathcal{R}$),

$$\alpha \in E/\mathcal{R} \iff (\exists x \in E)\ \alpha = \bar{x}.$$

Si $\alpha = \bar{x}$, on dit que x est un représentant de la classe α.

(1) Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans E.

(a) Montrer que, $\big(\forall (x,u,v) \in E^3\big) \quad (u \in \bar{x} \text{ et } v \in \bar{x}) \Rightarrow u \mathcal{R} v.$

(b) Montrer que, $\big(\forall (x,y) \in E^2\big) \quad \bar{x} = \bar{y} \iff x \mathcal{R} y.$

(2) Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans E. On suppose dans cette question que E est muni d'une loi de composition interne $*$ et que la relation $\mathcal{R}$ vérifie

$$\big(\forall (x,y,z) \in E^3\big) \qquad x \mathcal{R} y \Rightarrow \begin{cases} (x * z) \mathcal{R} (y * z) \\ (z * x) \mathcal{R} (z * y) \end{cases}$$

On dit alors que la relation $\mathcal{R}$ est compatible avec la loi $*$.

(a) Montrer que, $\big(\forall (x,y,u,v) \in E^4\big)$ $(x \mathcal{R} y$ et $u \mathcal{R} v) \Rightarrow (x * u) \mathcal{R} (y * v)$.

(b) Soient α et β deux éléments de $E/\mathcal{R}$ tels que $\alpha = \bar{x}$ et $\beta = \bar{y}$. Montrer que $\overline{x * y}$ ne dépend pas des représentants x et y (autrement dit, si $\alpha = \overline{x'}$ et $\beta = \overline{y'}$, alors $\overline{x * y} = \overline{x' * y'}$). On pose alors $\alpha \bar{*} \beta = \bar{x} \bar{*} \bar{y} = \overline{x * y}$, ce qui définit la loi $\bar{*}$ dans $E/\mathcal{R}$, appelée loi quotient (de la loi $*$ par la relation $\mathcal{R}$).

Partie B

On considère deux entiers relatifs non nuls a et b, et on munit $\mathbb{Z}$ de la loi de composition interne $*$ définie par, $x * y = ax + by$.

(1) Soit l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (x,y) &\longmapsto x * y \end{aligned}$$

(a) Déterminer $\varphi^{-1}(\{0\})$. L'application φ est-elle injective ?

(b) Quelle condition doivent vérifier a et b pour qu'il existe (x_0, y_0) tel que $\varphi(x_0, y_0) = 1$? Montrer que si cette condition est vérifiée, alors l'application φ est surjective.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Montrer que la congruence modulo n est compatible avec la loi $*$.

(3) On peut donc définir dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ la loi interne $\bar{*}$ par, $\bar{x} \bar{*} \bar{y} = \overline{x * y}$. Montrer que

(a) $\bar{*}$ est associative si et seulement si, $a(a-1) \equiv 0\ [n]$ et $b(b-1) \equiv 0\ [n]$.

(b) $\bar{*}$ est commutative si et seulement si, $a \equiv b\ [n]$.

(c) $\bar{*}$ admet un élément neutre si et seulement si, $a \equiv 1\ [n]$ et $b \equiv 1\ [n]$.

(4) On suppose que, $a \equiv 1\ [n]$ et $b \equiv 1\ [n]$. Montrer que $\bar{*}$ est associative, commutative, admet un élément neutre et que tout élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ admet un symétrique pour la loi quotient $\bar{*}$.

Study Topic 1 in Algebraic Structures. Quotient of an Internal Law by an Equivalence Relation

Summary, We define equivalence relations, equivalence classes and the quotient set $E/\mathcal{R}$, then study the condition under which an equivalence relation is compatible with an internal law, which makes it possible to define the quotient law on $E/\mathcal{R}$. This is applied to the law $x * y = ax + by$ on $\mathbb{Z}$ and to congruence modulo n, and the properties of the quotient law on $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ are studied.

Part A

Let E be a non-empty set and let $\mathcal{R}$ be a relation between elements of E. We say that $\mathcal{R}$ is an equivalence relation on E if it satisfies the following conditions,

$$\begin{array}{lll} (r) & (\forall x \in E) \quad x \,\mathcal{R}\, x & \text{(reflexivity)} \\ (s) & \big(\forall (x,y) \in E^2\big) \quad x \,\mathcal{R}\, y \Rightarrow y \,\mathcal{R}\, x & \text{(symmetry)} \\ (t) & \big(\forall (x,y,z) \in E^3\big) \quad (x \,\mathcal{R}\, y \text{ and } y \,\mathcal{R}\, z) \Rightarrow x \,\mathcal{R}\, z & \text{(transitivity)} \end{array}$$

For every $x \in E$, the set of elements u of E such that $u \,\mathcal{R}\, x$ is called the equivalence class of x and is denoted $\bar{x}$ (or $\operatorname{cl} x \pmod{\mathcal{R}}$),

$$\operatorname{cl} x \pmod{\mathcal{R}} = \bar{x} = \{u \in E \mid u \,\mathcal{R}\, x\}.$$

The set of equivalence classes of elements of E is denoted $E/\mathcal{R}$ and is called the quotient set (quotient of E by $\mathcal{R}$),

$$\alpha \in E/\mathcal{R} \iff (\exists x \in E)\ \alpha = \bar{x}.$$

If $\alpha = \bar{x}$, we say that x is a representative of the class α.

(1) Let $\mathcal{R}$ be an equivalence relation on E.

(a) Show that, $\big(\forall (x,u,v) \in E^3\big) \quad (u \in \bar{x} \text{ and } v \in \bar{x}) \Rightarrow u \,\mathcal{R}\, v.$

(b) Show that, $\big(\forall (x,y) \in E^2\big) \quad \bar{x} = \bar{y} \iff x \,\mathcal{R}\, y.$

(2) Let $\mathcal{R}$ be an equivalence relation on E. In this question, assume that E is equipped with an internal law $*$ and that the relation $\mathcal{R}$ satisfies

$$\big(\forall (x,y,z) \in E^3\big) \qquad x \,\mathcal{R}\, y \Rightarrow \begin{cases} (x * z) \,\mathcal{R}\, (y * z) \\ (z * x) \,\mathcal{R}\, (z * y) \end{cases}$$

We then say that the relation $\mathcal{R}$ is compatible with the law $*$.

(a) Show that, $\big(\forall (x,y,u,v) \in E^4\big) \quad (x \,\mathcal{R}\, y \text{ and } u \,\mathcal{R}\, v) \Rightarrow (x*u) \,\mathcal{R}\, (y* v)$.

(b) Let α and β be two elements of $E/\mathcal{R}$ such that $\alpha = \bar{x}$ and $\beta = \bar{y}$. Show that $\overline{x*y}$ does not depend on the representatives x and y (in other words, if $\alpha = \overline{x'}$ and $\beta = \overline{y'}$, then $\overline{x*y} = \overline{x'*y'}$). We then set $\alpha \,\bar{*}\, \beta = \bar{x} \,\bar{*}\, \bar{y} = \overline{x*y}$, which defines the law $\bar{*}$ on $E/\mathcal{R}$, called the quotient law (of the law $*$ by the relation $\mathcal{R}$).

Part B

Consider two non-zero integers a and b, and equip $\mathbb{Z}$ with the internal law $*$ defined by, $x*y = ax+by$.

(1) Consider the map

$$\begin{aligned} \varphi : \ \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (x,y) &\longmapsto x*y \end{aligned}$$

(a) Determine $\varphi^{-1}(\{0\})$. Is φ injective?

(b) What condition must a and b satisfy for there to exist (x_0,y_0) such that $\varphi(x_0,y_0)=1$? Show that if this condition holds, then the map φ is surjective.

(2) Let $n \in \mathbb{N}$ with $n \geqslant 2$. Show that congruence modulo n is compatible with the law $*$.

(3) One can therefore define on $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ the internal law $\bar{*}$ by, $\bar{x} \,\bar{*}\, \bar{y} = \overline{x*y}$. Show that

(a) $\bar{*}$ is associative if and only if, $a(a-1) \equiv 0\ [n]$ and $b(b-1) \equiv 0\ [n]$.

(b) $\bar{*}$ is commutative if and only if, $a \equiv b\ [n]$.

(c) $\bar{*}$ has an identity element if and only if, $a \equiv 1\ [n]$ and $b \equiv 1\ [n]$.

(4) Assume that, $a \equiv 1\ [n]$ and $b \equiv 1\ [n]$. Show that $\bar{*}$ is associative and commutative, has an identity element, and that every element of $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ has an inverse for the quotient law $\bar{*}$.