# بسم الله الرحمن الرحيم

**Professeur,** Saad Choukri
**Terminale SM**

الأستاذ، سعد شكري
باكالوريا علوم رياضية

## الموضوع 2 في حساب الاحتمالات. المتتاليات والاحتمال الشرطي

**ملخص،** يربط هذا الموضوع بين الاحتمالات الشرطية والمتتاليات. شخص يلعب لعبة متكررة يتعلق فيها الصندوق الذي يسحب منه بنتيجة المحاولة السابقة، فنكتب بواسطة صيغة الاحتمالات الكلية نظمة ترجعية تحققها احتمالات الربح والخسارة، ثم نستعمل متتالية هندسية مساعدة لتحديد احتمال الربح في المحاولة رقم $n$ ونهايته.

نعتبر صندوقين $U$ و $V$.

- الصندوق $U$ يحتوي على 6 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء.
- الصندوق $V$ يحتوي على 3 كرات بيضاء و 7 كرات سوداء.

نعتبر اللعبة الآتية، في المحاولة الأولى يختار شخص أحد الصندوقين عشوائيا ويسحب منه عشوائيا كرة واحدة. إذا كانت الكرة بيضاء فقد ربح، وإذا كانت سوداء فقد خسر. بعد ذلك يعيد الكرة إلى صندوقها، فإذا ربح في محاولة ما فإنه يسحب في المحاولة الموالية من الصندوق $U$، وإذا خسر فإنه يسحب في المحاولة الموالية من الصندوق $V$، وهكذا.
لكل $n$ من $\mathbb{N}^*$، ليكن $B_n$ و $M_n$ الحدثين،

$B_n$، «يربح الشخص في المحاولة رقم $n$»،

$M_n$، «يخسر الشخص في المحاولة رقم $n$».

**(1)** احسب الاحتمالات الآتية، $P(B_1)$ و $P_{B_1}(B_2)$ و $P_{M_1}(B_2)$، ثم حدد $P(B_2)$.

**(2)** احسب $P(M_2)$.

**(3)** لكل $n$ من $\mathbb{N}^*$، نضع، $u_n = P(B_n)$ و $p_n = P(M_n)$.

(a) احسب، $P_{B_n}(B_{n+1})$ و $P_{M_n}(M_{n+1})$.

(b) بين أنه لكل $n$ من $\mathbb{N}^*$،

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3}{5}u_n + \dfrac{3}{10}p_n \\ p_{n+1} = \dfrac{2}{5}u_n + \dfrac{7}{10}p_n \end{cases}$$

(c) بين أن، $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n + p_n = 1$ (استعمل برهانا بالترجع).

(d) لكل $n$ من $\mathbb{N}^*$، نضع، $v_n = 7u_n - 3$. بين أن $(v_n)$ متتالية هندسية محددا أساسها.

(e) حدد $u_n$ بدلالة $n$.

(f) بين أن $(u_n)$ متقاربة محددا نهايتها.

# Sujet d'étude 2 en Probabilités.
## Suites et probabilités conditionnelles

**Résumé,** Ce sujet relie probabilités conditionnelles et suites. Une personne joue à un jeu répété où l'urne utilisée dépend du résultat de la tentative précédente ; la formule des probabilités totales fournit un système récurrent vérifié par les probabilités de gain et de perte, puis une suite géométrique auxiliaire permet de déterminer la probabilité de gagner à la $n$-ième tentative et sa limite.

On considère deux urnes $U$ et $V$.

- L'urne $U$ contient 6 boules blanches et 4 boules noires.
- L'urne $V$ contient 3 boules blanches et 7 boules noires.

On considère le jeu suivant. À la première tentative, une personne choisit une des deux urnes au hasard et y tire au hasard une boule. Si la boule est blanche, elle gagne ; si elle est noire, elle perd. Elle remet ensuite la boule dans son urne ; si elle a gagné à une tentative, elle tire à la tentative suivante dans l'urne $U$, et si elle a perdu, elle tire à la tentative suivante dans l'urne $V$, et ainsi de suite.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements

$B_n$, « la personne gagne à la $n$-ième tentative »,

$M_n$, « la personne perd à la $n$-ième tentative ».

**(1)** Calculer les probabilités suivantes, $P(B_1)$, $P_{B_1}(B_2)$ et $P_{M_1}(B_2)$, puis déterminer $P(B_2)$.

**(2)** Calculer $P(M_2)$.

**(3)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose, $u_n = P(B_n)$ et $p_n = P(M_n)$.

(a) Calculer, $P_{B_n}(B_{n+1})$ et $P_{M_n}(M_{n+1})$.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3}{5}u_n + \dfrac{3}{10}p_n \\ p_{n+1} = \dfrac{2}{5}u_n + \dfrac{7}{10}p_n \end{cases}$$

(c) Montrer que, $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $u_n + p_n = 1$ (raisonner par récurrence).

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose, $v_n = 7u_n - 3$. Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique et préciser sa raison.

(e) Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.

(f) Montrer que la suite $(u_n)$ converge et préciser sa limite.

# Study Topic 2 in Probability. Sequences and Conditional Probability

**Summary,** This topic connects conditional probability and sequences. A person plays a repeated game in which the box used depends on the result of the previous attempt; the law of total probability gives a recursive system satisfied by the probabilities of winning and losing, then an auxiliary geometric sequence yields the probability of winning at the $n$-th attempt and its limit.

Consider two boxes $U$ and $V$.

- Box $U$ contains 6 white balls and 4 black balls.
- Box $V$ contains 3 white balls and 7 black balls.

Consider the following game. At the first attempt, a person chooses one of the two boxes at random and draws one ball from it at random. If the ball is white, the person wins; if it is black, the person loses. The ball is then put back into its box; if the person won an attempt, the next draw is made from box $U$, and if the person lost, the next draw is made from box $V$, and so on. For every $n \in \mathbb{N}^*$, consider the events

$B_n$, "the person wins at the $n$-th attempt",

$M_n$, "the person loses at the $n$-th attempt".

**(1)** Compute the following probabilities, $P(B_1)$, $P_{B_1}(B_2)$ and $P_{M_1}(B_2)$, then determine $P(B_2)$.

**(2)** Compute $P(M_2)$.

**(3)** For every $n \in \mathbb{N}^*$, set, $u_n = P(B_n)$ and $p_n = P(M_n)$.

(a) Compute, $P_{B_n}(B_{n+1})$ and $P_{M_n}(M_{n+1})$.

(b) Show that, for every $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3}{5}u_n + \dfrac{3}{10}p_n \\ p_{n+1} = \dfrac{2}{5}u_n + \dfrac{7}{10}p_n \end{cases}$$

(c) Show that, $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $u_n + p_n = 1$ (use induction).

(d) For every $n \in \mathbb{N}^*$, set, $v_n = 7u_n - 3$. Show that $(v_n)$ is a geometric sequence and give its ratio.

(e) Express $u_n$ in terms of $n$.

(f) Show that the sequence $(u_n)$ converges and give its limit.