بسم الله الرحمن الرحيم

الأستاذ، سعد شكري — **Professeur,** Saad Choukri

باكالوريا علوم رياضية — **Terminale SM**

الموضوع 1 في حساب الاحتمالات. وسيطات متغير عشوائي

ملخص، نعتبر سحبات متتالية بإحلال من صندوق يحتوي على كرات حمراء وسوداء، ونهتم بعدد السحبات اللازمة للحصول على أول كرة حمراء. نحدد قانون احتمال هذا المتغير العشوائي عندما يكون عدد السحبات محدودا، ثم نحسب أمله الرياضي بواسطة حدودية تستخرج صيغتها المختصرة باشتقاق مجموع متتالية هندسية.

يحتوي صندوق على 60 كرة حمراء و 40 كرة سوداء. نجري سحبات متتالية عشوائية مع إرجاع الكرة إلى الصندوق بعد السحب ونتوقف حينما نحصل على كرة حمراء.

الجزء I

في هذا الجزء، نجري أربع سحبات على الأكثر. وليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد السحبات الضرورية للحصول لأول مرة على كرة حمراء، ونصطلح على أن X يساوي 0 إذا لم نحصل على كرة حمراء بعد السحبات الأربع.

(1) احسب $P(X=0)$.

(2) احسب $P(X=k)$ لكل k من $\{1,2,3,4\}$ (أي حدد قانون احتمال X).

الجزء II

نفترض في هذا الجزء أننا نجري n سحبة كحد أقصى حيث $n \in \mathbb{N}^*$. وليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد السحبات اللازمة للحصول لأول مرة على كرة حمراء، مع X يساوي 0 إذا لم نحصل على كرة حمراء خلال السحبات كلها.

(1) حدد $P(X=k)$ لكل $k \in \{1,2,\ldots,n\}$.

(2) نعتبر الحدودية، $L(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$، وليكن $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X. بين أن، $E(X) = \frac{3}{5}\,L\left(\frac{2}{5}\right)$.

(3) نعلم أنه لكل عدد حقيقي x يخالف 1، لدينا، $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.

(a) باشتقاق طرفي المتساوية السابقة، أعط تعبيرا آخر للحدودية $L(x)$.

(b) استنتج أن، $E(X) = \dfrac{5}{3} - \left(n + \dfrac{5}{3}\right)\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

Sujet d'étude 1 en Probabilités. Paramètres d'une variable aléatoire

Résumé, On effectue des tirages successifs avec remise dans une urne contenant des boules rouges et noires, et on s'intéresse au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule rouge. On détermine la loi de cette variable aléatoire lorsque le nombre de tirages est limité, puis on calcule son espérance à l'aide d'un polynôme dont on obtient une expression condensée en dérivant la somme d'une suite géométrique.

Une urne contient 60 boules rouges et 40 boules noires. On effectue des tirages successifs au hasard, en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage, et on s'arrête dès que l'on obtient une boule rouge.

Partie I

Dans cette partie, on effectue au plus quatre tirages. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule rouge pour la première fois ; on convient que X vaut 0 si l'on n'obtient pas de boule rouge à l'issue des quatre tirages.

(1) Calculer $P(X = 0)$.

(2) Calculer $P(X = k)$ pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ (c'est-à-dire déterminer la loi de probabilité de X).

Partie II

On suppose dans cette partie que l'on effectue au plus n tirages, où $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule rouge pour la première fois, X valant 0 si l'on n'obtient aucune boule rouge au cours de tous les tirages.

(1) Déterminer $P(X = k)$ pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(2) On considère le polynôme, $L(x) = 1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$, et on note $E(X)$ l'espérance mathématique de X. Montrer que, $E(X) = \dfrac{3}{5}\, L\left(\dfrac{2}{5}\right)$.

(3) On sait que, pour tout réel x différent de 1, $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.

(a) En dérivant les deux membres de l'égalité précédente, donner une autre expression du polynôme $L(x)$.

(b) En déduire que, $E(X) = \frac{5}{3} - \left(n + \frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

Study Topic 1 in Probability. Parameters of a Random Variable

Summary, Successive draws with replacement are made from a box containing red and black balls, and we are interested in the number of draws needed to obtain the first red ball. We determine the probability distribution of this random variable when the number of draws is limited, then compute its expectation using a polynomial whose closed form is obtained by differentiating the sum of a geometric sequence.

A box contains 60 red balls and 40 black balls. Successive random draws are made, putting the ball back into the box after each draw, and we stop as soon as a red ball is obtained.

Part I

In this part, at most four draws are made. Let X be the random variable equal to the number of draws needed to obtain a red ball for the first time; by convention X equals 0 if no red ball has been obtained after the four draws.

(1) Compute $P(X = 0)$.

(2) Compute $P(X = k)$ for every $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ (that is, determine the probability distribution of X).

Part II

In this part, assume that at most n draws are made, where $n \in \mathbb{N}^*$. Let X be the random variable equal to the number of draws needed to obtain a red ball for the first time, with X equal to 0 if no red ball is obtained during all the draws.

(1) Determine $P(X = k)$ for every $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(2) Consider the polynomial, $L(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$, and let $E(X)$ be the expected value of X. Show that, $E(X) = \frac{3}{5} L\left(\frac{2}{5}\right)$.

(3) We know that, for every real number $x \neq 1$, $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.

(a) By differentiating both sides of this equality, give another expression of the polynomial $L(x)$.

(b) Deduce that, $E(X) = \frac{5}{3} - \left(n + \frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n$.