بسم الله الرحمن الرحيم

الأستاذ، سعد شكري — **Professeur,** Saad Choukri

باكالوريا علوم رياضية — **Terminale SM**

الموضوع 4 في الأعداد العقدية. تحديد جداء

ملخص، نحل في $\mathbb{C}$ معادلات من نوع $(z+\bar{a})^n=(z+a)^n$ و $(z+i)^n=e^{i\alpha}(z-i)^n$، ونبين أن حلولها أعداد حقيقية يعبر عنها بواسطة دالة ظل التمام. بعد ذلك نربط جداء جذور حدودية بمعاملها الثابت ومعاملها الرئيسي لنستنتج قيمة جداء مثلثي صريح.

ليكن a عددا تخيليا صرفا غير منعدم و n عددا من $\mathbb{N}$ بحيث $n\geqslant 2$. نعتبر المعادلة،

$$(E)\qquad (z+\bar{a})^n-(z+a)^n=0.$$

لتكن S مجموعة حلول المعادلة (E).

(1) بين أن، $z\in S\Rightarrow z\in\mathbb{R}$.

(2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

(3) نعتبر المعادلة،

$$(F)\qquad (z+i)^n-e^{i\alpha}(z-i)^n=0,$$

حيث، $\alpha\neq 2k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$.

(a) بين أن حلول المعادلة (F) تنتمي إلى $\mathbb{R}$.

(b) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (F).

(4) نضع، $P(z)=(z+i)^n-e^{i\alpha}(z-i)^n$.

(a) حدد درجة الحدودية P.

(b) نضع، $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$. حدد a_0 بدلالة α.

(c) ليكن z_1 و z_2 و ... و z_n حلول المعادلة $P(z)=0$. بين أن، $z_1\times z_2\times\cdots\times z_n=(-1)^n\times\dfrac{a_0}{a_n}$.

(d) استنتج أن،

$$(\forall p \in \mathbb{N}^*) \qquad \prod_{k=1}^{2p+1} \cot\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{4p+2}\right) = (-1)^p \cot\frac{\alpha}{2}.$$

Sujet d'étude 4 en Nombres complexes. Calcul d'un produit

Résumé, On résout dans $\mathbb{C}$ des équations du type $(z+\bar{a})^n = (z+a)^n$ et $(z+i)^n = e^{i\alpha}(z-i)^n$, dont on montre que les solutions sont réelles et s'expriment à l'aide de la cotangente. On relie ensuite le produit des racines d'un polynôme à son coefficient constant et à son coefficient dominant pour en déduire la valeur d'un produit trigonométrique explicite.

Soit a un nombre imaginaire pur non nul et n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$. On considère l'équation

$$(E) \qquad (z+\bar{a})^n - (z+a)^n = 0.$$

Soit S l'ensemble des solutions de l'équation (E).

(1) Montrer que, $z \in S \Rightarrow z \in \mathbb{R}$.

(2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

(3) On considère l'équation

$$(F) \qquad (z+i)^n - e^{i\alpha}(z-i)^n = 0,$$

où, $\alpha \neq 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$.

(a) Montrer que les solutions de l'équation (F) appartiennent à $\mathbb{R}$.

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (F).

(4) On pose, $P(z) = (z+i)^n - e^{i\alpha}(z-i)^n$.

(a) Déterminer le degré du polynôme P.

(b) On pose, $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$. Déterminer a_0 en fonction de α.

(c) Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les solutions de l'équation $P(z) = 0$. Montrer que, $z_1 \times z_2 \times \cdots \times z_n = (-1)^n \times \dfrac{a_0}{a_n}$.

(d) En déduire que

$$(\forall p \in \mathbb{N}^*) \qquad \prod_{k=1}^{2p+1} \cot\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{4p+2}\right) = (-1)^p \cot\frac{\alpha}{2}.$$

Study Topic 4 in Complex Numbers. Computing a Product

Summary, We solve in $\mathbb{C}$ equations of the form $(z+\bar{a})^n = (z+a)^n$ and $(z+i)^n = e^{i\alpha}(z-i)^n$, show that their solutions are real and express them with the cotangent function. We then relate the product of the roots of a polynomial to its constant and leading coefficients to deduce the value of an explicit trigonometric product.

Let a be a non-zero purely imaginary number and n a natural number with $n \geqslant 2$. Consider the equation

$$(E) \qquad (z+\bar{a})^n - (z+a)^n = 0.$$

Let S be the set of solutions of the equation (E).

(1) Show that, $\quad z \in S \Rightarrow z \in \mathbb{R}$.

(2) Solve the equation (E) in $\mathbb{C}$.

(3) Consider the equation

$$(F) \qquad (z+i)^n - e^{i\alpha}(z-i)^n = 0,$$

where, $\quad \alpha \neq 2k\pi \quad$ and $\quad k \in \mathbb{Z}$.

(a) Show that the solutions of the equation (F) belong to $\mathbb{R}$.

(b) Solve the equation (F) in $\mathbb{C}$.

(4) Set, $\quad P(z) = (z+i)^n - e^{i\alpha}(z-i)^n$.

(a) Determine the degree of the polynomial P.

(b) Write, $\quad P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$. Determine a_0 in terms of α.

(c) Let $z_1, z_2, \ldots, z_n$ be the solutions of the equation $P(z) = 0$. Show that, $\quad z_1 \times z_2 \times \cdots \times z_n = (-1)^n \times \dfrac{a_0}{a_n}$.

(d) Deduce that

$$(\forall p \in \mathbb{N}^*) \qquad \prod_{k=1}^{2p+1} \cot\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{4p+2}\right) = (-1)^p \cot\frac{\alpha}{2}.$$