بسم الله الرحمن الرحيم

Professeur, Saad Choukri — **الأستاذ، سعد شكري**

Terminale SM — **باكالوريا علوم رياضية**

الموضوع 3 في الأعداد العقدية. إثبات علاقة مثلثية

ملخص، نعتبر متتالية عقدية معرفة بالعلاقة $Z_{n+1} = Z_n + |Z_n|$ انطلاقا من $Z_0 = e^{ix}$. ندرس متتالية عمدها ونثبت أنها هندسية، ونلاحظ أن الجزء التخيلي يبقى ثابتا لنحسب المعيار $|Z_n|$، ثم نجمع العلاقات الترجعية لنستنتج علاقة مثلثية تربط بين $\cot\frac{x}{2^n}$ و $\cot x$ ومجموع مقلوبات الجيوب.

لتكن (Z_n) متتالية الأعداد العقدية المعرفة بما يلي،

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad Z_{n+1} = Z_n + |Z_n|, \qquad \text{و} \qquad Z_0 = \cos x + i \sin x$$

حيث x عدد من المجال $]0, \frac{\pi}{2}[$.

(1) اكتب على الشكل المثلثي العدد Z_1.

(2) لتكن (α_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي، $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \alpha_n \equiv \arg Z_n \ [2\pi]$ و $\alpha_n \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

(a) بين أن المتتالية (α_n) هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{2}$.

(b) استنتج (α_n) بدلالة x.

(3) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة بما يلي، $v_n = Z_n - \overline{Z_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

(a) عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n. ماذا تستنتج؟

(b) بين أن، $|Z_n| = \dfrac{\sin x}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

(4) بين أن، $Z_n - Z_0 = |Z_0| + |Z_1| + \cdots + |Z_{n-1}| \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

(5) استنتج أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$،

$$\cot\frac{x}{2^n} - \cot x = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} + \cdots + \frac{1}{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}.$$

Sujet d'étude 3 en Nombres complexes. Démonstration d'une relation trigonométrique

Résumé, On considère une suite complexe définie par $Z_{n+1} = Z_n + |Z_n|$ à partir de $Z_0 = e^{ix}$. On étudie la suite de ses arguments, qui est géométrique, on remarque que la partie imaginaire reste constante pour calculer le module $|Z_n|$, puis on somme les relations de récurrence pour obtenir une relation trigonométrique liant $\cot \frac{x}{2^n}$, $\cot x$ et une somme d'inverses de sinus.

Soit (Z_n) la suite de nombres complexes définie par

$$Z_0 = \cos x + i \sin x \qquad \text{et} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad Z_{n+1} = Z_n + |Z_n|,$$

où x est un réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

(1) Écrire le nombre Z_1 sous forme trigonométrique.

(2) Soit (α_n) la suite numérique définie par, $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \alpha_n \equiv \arg Z_n \ [2\pi]$ et $\alpha_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

(a) Montrer que la suite (α_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

(b) En déduire α_n en fonction de x.

(3) Soit (v_n) la suite définie par, $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = Z_n - \overline{Z_n}$.

(a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. Que peut-on en déduire ?

(b) Montrer que, $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |Z_n| = \dfrac{\sin x}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$.

(4) Montrer que, $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad Z_n - Z_0 = |Z_0| + |Z_1| + \cdots + |Z_{n-1}|$.

(5) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\cot \frac{x}{2^n} - \cot x = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} + \cdots + \frac{1}{\sin \frac{x}{2^{n-1}}}.$$

Study Topic 3 in Complex Numbers. Proving a Trigonometric Identity

Summary, We consider a complex sequence defined by $Z_{n+1} = Z_n + |Z_n|$ starting from $Z_0 = e^{ix}$. We study the sequence of its arguments, which is geometric, notice that the imaginary part remains constant in order to compute the modulus $|Z_n|$, then add up the recurrence relations to obtain a trigonometric identity linking $\cot \frac{x}{2^n}$, $\cot x$ and a sum of reciprocals of sines.

Let (Z_n) be the sequence of complex numbers defined by

$$Z_0 = \cos x + i \sin x \qquad \text{and} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad Z_{n+1} = Z_n + |Z_n|,$$

where x is a real number in the interval $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

(1) Write the number Z_1 in trigonometric form.

(2) Let (α_n) be the sequence defined by, $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \alpha_n \equiv \arg Z_n \ [2\pi]$ and $\alpha_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

(a) Show that the sequence (α_n) is geometric with ratio $q = \dfrac{1}{2}$.

(b) Deduce α_n in terms of x.

(3) Let (v_n) be the sequence defined by, $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = Z_n - \overline{Z_n}$.

(a) Express v_{n+1} in terms of v_n. What can be deduced?

(b) Show that, $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |Z_n| = \dfrac{\sin x}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$.

(4) Show that, $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad Z_n - Z_0 = |Z_0| + |Z_1| + \cdots + |Z_{n-1}|$.

(5) Deduce that, for every $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\cot \frac{x}{2^n} - \cot x = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} + \cdots + \frac{1}{\sin \frac{x}{2^{n-1}}}.$$