بسم الله الرحمن الرحيم

Professeur, Saad Choukri — **الأستاذ، سعد شكري**

Terminale SM — **باكالوريا علوم رياضية**

الموضوع 2 في الأعداد العقدية. الأعداد العقدية والحسابيات

ملخص، يربط هذا الموضوع بين الأعداد العقدية والحسابيات من خلال الحدوديات السيكلوتومية φ_n، وهي جداءات العوامل $z-\omega_k$ حيث ω_k الجذور البدائية من الرتبة n للوحدة. ندرس درجتها وصيغها في حالات خاصة، ونثبت العلاقة $s^n-1=\prod_{\delta|n}\varphi_\delta(s)$ ونستنتج خاصيات قسمة للأعداد الصحيحة $\varphi_n(s)$.

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$. لكل عدد صحيح طبيعي k من $\{0,1,\dots,n-1\}$، نضع، $\omega_k=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

(1) بين أنه لكي يكون $k\wedge n=1$ يلزم ويكفي ألا يكون ω_k جذرا من الرتبة m للوحدة لكل m من $\mathbb{N}^*$ بحيث $m<n$.

(2) ليكن z من $\mathbb{C}$، نضع،

$$\varphi_n(z)=\prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant n-1\\ k\wedge n=1}}(z-\omega_k).$$

(a) ما درجة الحدودية φ_n؟

(b) إذا كان n عددا أوليا، فأعط $\varphi_n(z)$ بدلالة z (في أبسط شكل ممكن).

(c) بين أنه إذا كان n عددا أوليا فرديا، فإن، $\varphi_{2n}(z)=\varphi_n(-z)$.
تطبيق، حدد $\varphi_5(z)$ واستنتج $\varphi_{10}(z)$.

(d) حدد $\mathcal{D}$ مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 12، ثم احسب $\varphi_d(z)$ لكل d من $\mathcal{D}$، وتحقق أن، $z^{12}-1=\prod_{d\in\mathcal{D}}\varphi_d(z)$.

(3) ليكن s عددا صحيحا طبيعيا بحيث $s\geqslant 2$، ولدينا، $\varphi_n(s)=\prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant n-1\\ k\wedge n=1}}(s-\omega_k)$. بين أن،

(a) $s^n - 1 = \prod_{\delta|n} \varphi_\delta(s)$.

(b) $|\varphi_n(s)| \geqslant s - 1$.

(c) $\varphi_n(s) \in \mathbb{Z}$.

(d) إذا كان d عددا من $\mathbb{N}^*$ يقسم n ويخالف n، فإن $\varphi_n(s)$ يقسم $\frac{s^n - 1}{s^d - 1}$.

Sujet d'étude 2 en Nombres complexes. Nombres complexes et arithmétique

Résumé, Ce sujet relie nombres complexes et arithmétique à travers les polynômes cyclotomiques φ_n, produits des facteurs $z-\omega_k$ où les ω_k sont les racines primitives n-ièmes de l'unité. On étudie leur degré et leur expression dans des cas particuliers, on établit la relation $s^n-1=\prod_{\delta|n}\varphi_\delta(s)$ et on en déduit des propriétés de divisibilité des entiers $\varphi_n(s)$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout entier naturel k de $\{0,1,\dots,n-1\}$, on pose, $\omega_k=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

(1) Montrer que $k\wedge n=1$ si et seulement si ω_k n'est une racine m-ième de l'unité pour aucun $m\in\mathbb{N}^*$ tel que $m<n$.

(2) Pour $z\in\mathbb{C}$, on pose

$$\varphi_n(z)=\prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant n-1\\ k\wedge n=1}}(z-\omega_k).$$

(a) Quel est le degré du polynôme φ_n ?

(b) Si n est premier, donner $\varphi_n(z)$ en fonction de z (sous la forme la plus simple possible).

(c) Montrer que si n est un nombre premier impair, alors, $\varphi_{2n}(z)=\varphi_n(-z)$.
Application, déterminer $\varphi_5(z)$ et en déduire $\varphi_{10}(z)$.

(d) Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des diviseurs naturels de 12, puis calculer $\varphi_d(z)$ pour tout $d\in\mathcal{D}$, et vérifier que, $z^{12}-1=\prod_{d\in\mathcal{D}}\varphi_d(z)$.

(3) Soit s un entier naturel tel que $s\geqslant 2$; on a, $\varphi_n(s)=\prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant n-1\\ k\wedge n=1}}(s-\omega_k)$.

Montrer que

(a) $s^n-1=\prod_{\delta|n}\varphi_\delta(s)$.

(b) $|\varphi_n(s)|\geqslant s-1$.

(c) $\varphi_n(s)\in\mathbb{Z}$.

(d) si $d \in \mathbb{N}^*$ divise n et $d \neq n$, alors $\varphi_n(s)$ divise $\dfrac{s^n - 1}{s^d - 1}$.

Study Topic 2 in Complex Numbers. Complex Numbers and Arithmetic

Summary, This topic connects complex numbers and arithmetic through the cyclotomic polynomials φ_n, products of the factors $z-\omega_k$ where the ω_k are the primitive n-th roots of unity. We study their degree and their expression in particular cases, prove the relation $s^n-1=\prod_{\delta|n}\varphi_\delta(s)$ and deduce divisibility properties of the integers $\varphi_n(s)$.

Let $n\in\mathbb{N}^*$. For every natural number k in $\{0,1,\ldots,n-1\}$, set, $\omega_k=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

(1) Show that $k\wedge n=1$ if and only if ω_k is not an m-th root of unity for any $m\in\mathbb{N}^*$ with $m<n$.

(2) For $z\in\mathbb{C}$, set

$$\varphi_n(z)=\prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant n-1\\ k\wedge n=1}}(z-\omega_k).$$

(a) What is the degree of the polynomial φ_n?

(b) If n is prime, give $\varphi_n(z)$ in terms of z (in the simplest possible form).

(c) Show that if n is an odd prime, then, $\varphi_{2n}(z)=\varphi_n(-z)$.
Application, determine $\varphi_5(z)$ and deduce $\varphi_{10}(z)$.

(d) Determine the set $\mathcal{D}$ of natural divisors of 12, then compute $\varphi_d(z)$ for every $d\in\mathcal{D}$, and check that, $z^{12}-1=\prod_{d\in\mathcal{D}}\varphi_d(z)$.

(3) Let s be a natural number with $s\geqslant 2$; we have, $\varphi_n(s)=\prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant n-1\\ k\wedge n=1}}(s-\omega_k)$.

Show that

(a) $s^n-1=\prod_{\delta|n}\varphi_\delta(s)$.

(b) $|\varphi_n(s)|\geqslant s-1$.

(c) $\varphi_n(s)\in\mathbb{Z}$.

(d) if $d\in\mathbb{N}^*$ divides n and $d\neq n$, then $\varphi_n(s)$ divides $\dfrac{s^n-1}{s^d-1}$.