بسم الله الرحمن الرحيم

Professeur, Saad Choukri

Terminale SM

الأستاذ، سعد شكري

باكالوريا علوم رياضية

الموضوع 1 في الأعداد العقدية. الجذور من الرتبة n للوحدة

ملخص، نعتبر عددا عقديا $u = e^{i\theta}$ ذا معيار 1 وندرس العددين $1 + iu$ و $-1 + iu$. باختيار خاص للزاوية θ نحسب مجموع متتالية هندسية للعدد iu ونستنتج تصغيرا لجيب زاوية، ثم ندرس الدالة العقدية $f(u) = \frac{u(u-i)}{(u+i)^2}$ ونحدد مجموعة النقط التي ألحاقها $f(u)$ عندما تتغير θ.

ليكن θ عددا حقيقيا بحيث $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$، وليكن، $u = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

(1) (a) تحقق أن، $u \neq i$ و $u \neq -i$.

(b) حدد معيار وعمدة كل من، $1 + iu$ و $-1 + iu$.

(2) نفترض أن، $\theta = \dfrac{-\pi}{8p+6}$ حيث p عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

(a) بين أن، $\displaystyle\sum_{k=0}^{4p+2} (iu)^k = \frac{-2}{-1+iu}$.

(b) استنتج أن، $|-1+iu| \geqslant \dfrac{2}{4p+3}$.

(c) بين أن، $\sin\left(\dfrac{(2p+1)\pi}{8p+6}\right) \geqslant \dfrac{1}{4p+3}$.

(3) نفترض في هذا السؤال أن، $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$، ونضع، $f(u) = \dfrac{u(u-i)}{(u+i)^2}$.

(a) بين أن، $\overline{f(u)} = \dfrac{1+iu}{(-1+iu)^2}$.

(b) اكتب $\overline{f(u)}$ ثم $f(u)$ على الشكل المثلثي.

(c) لتكن (Γ) مجموعة النقط $M\big(f(u)\big)$ حيث θ يتغير في $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. بين أن (Γ) هي منحنى الدالة φ المعرفة على المجال $]-\infty,0[$ بما يلي، $\varphi(x)=-\sqrt{\frac{|x|}{2}}$.

Sujet d'étude 1 en Nombres complexes. Les racines n-ièmes de l'unité

Résumé, On considère un nombre complexe $u = e^{i\theta}$ de module 1 et on étudie les nombres $1+iu$ et $-1+iu$. Pour un choix particulier de θ, on calcule la somme d'une suite géométrique de raison iu et on en déduit une minoration d'un sinus, puis on étudie la fonction complexe $f(u) = \frac{u(u-i)}{(u+i)^2}$ et on détermine l'ensemble des points d'affixe $f(u)$ lorsque θ varie.

Soit θ un réel tel que $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, et soit, $u = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

(1) (a) Vérifier que, $u \neq i$ et $u \neq -i$.

(b) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres, $1+iu$ et $-1+iu$.

(2) On suppose que, $\theta = \dfrac{-\pi}{8p+6}$ où p est un entier naturel non nul.

(a) Montrer que, $\displaystyle\sum_{k=0}^{4p+2}(iu)^k = \frac{-2}{-1+iu}$.

(b) En déduire que, $|-1+iu| \geqslant \dfrac{2}{4p+3}$.

(c) Montrer que, $\sin\left(\dfrac{(2p+1)\pi}{8p+6}\right) \geqslant \dfrac{1}{4p+3}$.

(3) On suppose dans cette question que, $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et on pose, $f(u) = \dfrac{u(u-i)}{(u+i)^2}$.

(a) Montrer que, $\overline{f(u)} = \dfrac{1+iu}{(-1+iu)^2}$.

(b) Écrire $\overline{f(u)}$ puis $f(u)$ sous forme trigonométrique.

(c) Soit (Γ) l'ensemble des points $M\big(f(u)\big)$ lorsque θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que (Γ) est la courbe de la fonction φ définie sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ par, $\varphi(x) = -\sqrt{\dfrac{|x|}{2}}$.

Study Topic 1 in Complex Numbers. The n-th Roots of Unity

Summary, We consider a complex number $u = e^{i\theta}$ of modulus 1 and study the numbers $1 + iu$ and $-1 + iu$. For a particular choice of θ, we compute the sum of a geometric sequence with ratio iu and deduce a lower bound for a sine, then study the complex function $f(u) = \frac{u(u-i)}{(u+i)^2}$ and determine the set of points with affix $f(u)$ as θ varies.

Let θ be a real number such that $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, and let, $u = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

(1) (a) Check that, $u \neq i$ and $u \neq -i$.

(b) Determine the modulus and an argument of each of the numbers, $1 + iu$ and $-1 + iu$.

(2) Assume that, $\theta = \dfrac{-\pi}{8p+6}$ where p is a non-zero natural number.

(a) Show that, $\displaystyle\sum_{k=0}^{4p+2}(iu)^k = \frac{-2}{-1+iu}$.

(b) Deduce that, $|-1+iu| \geqslant \dfrac{2}{4p+3}$.

(c) Show that, $\sin\left(\dfrac{(2p+1)\pi}{8p+6}\right) \geqslant \dfrac{1}{4p+3}$.

(3) In this question, assume that, $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, and set, $f(u) = \dfrac{u(u-i)}{(u+i)^2}$.

(a) Show that, $\overline{f(u)} = \dfrac{1+iu}{(-1+iu)^2}$.

(b) Write $\overline{f(u)}$ then $f(u)$ in trigonometric form.

(c) Let (Γ) be the set of points $M\big(f(u)\big)$ as θ ranges over $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Show that (Γ) is the graph of the function φ defined on the interval $]-\infty, 0[$ by, $\varphi(x) = -\sqrt{\dfrac{|x|}{2}}$.