بسم الله الرحمن الرحيم

الأستاذ، سعد شكري
باكالوريا علوم رياضية

Professeur, Saad Choukri
Terminale SM

الموضوع 13 في التحليل. تكاملات فاليس وتكامل غاوس

ملخص، ندرس تكاملات فاليس $u_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\, dt$، علاقتها الترجعية وقيمها الصريحة وتكافؤها المقارب $u_n\sqrt{n} \to \sqrt{\pi/2}$، ثم نوظفها في حساب تكاملات أخرى بواسطة المكاملة بالأجزاء. وفي الجزء الأخير نؤطر الدالة $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ بواسطة تكاملات فاليس لنستنتج قيمة تكامل غاوس $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

الجزء A

لكل n من $\mathbb{N}$، نضع، $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\, dt$.

(1) بين أن، $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

(2) بين أن، $u_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, u_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

(3) استنتج أنه لكل n من $\mathbb{N}$،

$$u_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \quad \text{و} \quad u_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

(4) بين أن، $(n+1)\, u_n\, u_{n+1} = \dfrac{\pi}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

(5) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية وأن، $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

(6) بين أن، $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\sqrt{n} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

الجزء B

(1) احسب u_6.

(2) بين أن،

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(t)\cos^n(t)\,dt = \frac{3}{(n+2)(n+4)}\,u_n,$$

واستنتج حساب التكامل $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(t)\cos^6(t)\,dt$.

الجزء C

لكل n من $\mathbb{N}$، نضع، $\displaystyle x_n = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(2t)\sin^{2n}(t)\,dt$. باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن، $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_n = \dfrac{\pi}{2} - u_{2n+2}$، ثم حدد $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n$.

الجزء D

لتكن F الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي، $\displaystyle F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

(1) بين أنه لكل عدد حقيقي موجب x، $\displaystyle F(x) \leqslant \frac{1}{e} + \int_0^1 e^{-t^2}\,dt$.

(2) بين أن الدالة F تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$ (نقبل أن الدالة F تقبل نهاية منتهية عند $+\infty$).

(3) بين أن،

$$(\forall u \in [0,+\infty[) \quad e^{-u^2} \leqslant \frac{1}{1+u^2}. \qquad \text{و} \qquad (\forall t \in [0,1]) \quad e^{-t^2} \geqslant 1 - t^2$$

لكل n من $\mathbb{N}$ ولكل x من $]0,+\infty[$، نضع،

$$J_n(x) = \int_0^x \frac{du}{(1+u^2)^n}. \qquad \text{و} \qquad I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\,dt$$

(4) (a) بين أن، $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad I_n = u_{2n+1}$.

(b) بين أن، $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \displaystyle\lim_{x\to+\infty} J_n(x) = u_{2n-2}$.

(5) بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$،

(a) $\displaystyle\int_0^1 e^{-nt^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,dt$.

(b) $\displaystyle\int_0^1 e^{-nt^2}\,dt \geqslant \int_0^1 (1-t^2)^n\,dt$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) \geqslant \sqrt{n}\,u_{2n+1}$.

(6) بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$،

(a) $\displaystyle\int_0^x e^{-nu^2}\,du \leqslant \int_0^x \frac{du}{(1+u^2)^n}$ $\quad(\forall x \in [0,+\infty[)$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) \leqslant \sqrt{n}\,u_{2n-2}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Sujet d'étude 13 en Analyse. Intégrales de Wallis et intégrale de Gauss

Résumé, On étudie les intégrales de Wallis $u_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\, dt$, leur relation de récurrence, leurs valeurs explicites et le comportement asymptotique $u_n\sqrt{n} \to \sqrt{\pi/2}$, puis on les utilise pour calculer d'autres intégrales par intégration par parties. Dans la dernière partie, on encadre la fonction $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ à l'aide des intégrales de Wallis pour obtenir la valeur de l'intégrale de Gauss $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Partie A

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose, $\quad u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\, dt.$

(1) Montrer que, $\quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt.$

(2) Montrer que, $\quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, u_n.$

(3) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad u_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

(4) Montrer que, $\quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n+1)\, u_n\, u_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}.$

(5) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que, $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$

(6) Montrer que, $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n\sqrt{n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

Partie B

(1) Calculer u_6.

(2) Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(t)\cos^n(t)\, dt = \frac{3}{(n+2)(n+4)}\, u_n,$$

et en déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(t)\cos^6(t)\, dt.$

Partie C

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose, $x_n = (n+1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(2t)\sin^{2n}(t)\,dt$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_n = \dfrac{\pi}{2} - u_{2n+2}$, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Partie D

Soit F la fonction numérique définie sur $[0,+\infty[$ par, $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

(1) Montrer que, pour tout réel positif x, $F(x) \leqslant \dfrac{1}{e} + \displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$.

(2) Montrer que la fonction F est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ (on admet que F admet une limite finie en $+\infty$).

(3) Montrer que,

$$(\forall t \in [0,1]) \quad e^{-t^2} \geqslant 1-t^2 \qquad \text{et} \qquad (\forall u \in [0,+\infty[) \quad e^{-u^2} \leqslant \frac{1}{1+u^2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,+\infty[$, on pose

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\,dt \qquad \text{et} \qquad J_n(x) = \int_0^x \frac{du}{(1+u^2)^n}.$$

(4) (a) Montrer que, $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad I_n = u_{2n+1}$.

(b) Montrer que, $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \lim\limits_{x\to+\infty} J_n(x) = u_{2n-2}$.

(5) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

(a) $\displaystyle\int_0^1 e^{-nt^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,dt$.

(b) $\displaystyle\int_0^1 e^{-nt^2}\,dt \geqslant \int_0^1 (1-t^2)^n\,dt$.

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \geqslant \sqrt{n}\,u_{2n+1}$.

(6) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

(a) $(\forall x \in [0,+\infty[) \quad \displaystyle\int_0^x e^{-nu^2}\,du \leqslant \int_0^x \frac{du}{(1+u^2)^n}$.

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \leqslant \sqrt{n}\, u_{2n-2}$.

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Study Topic 13 in Analysis. Wallis Integrals and the Gauss Integral

Summary, We study the Wallis integrals $u_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\, dt$, their recurrence relation, their explicit values and the asymptotic behaviour $u_n\sqrt{n} \to \sqrt{\pi/2}$, then use them to compute other integrals by integration by parts. In the last part, the function $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ is bounded using Wallis integrals to obtain the value of the Gauss integral $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Part A

For every $n \in \mathbb{N}$, set, $\quad u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\, dt.$

(1) Show that, $\quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt.$

(2) Show that, $\quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, u_n.$

(3) Deduce that, for every $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad \text{and} \qquad u_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

(4) Show that, $\quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n+1)\, u_n\, u_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}.$

(5) Show that the sequence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is decreasing and that, $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$

(6) Show that, $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n\sqrt{n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

Part B

(1) Compute u_6.

(2) Show that

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(t)\cos^n(t)\, dt = \frac{3}{(n+2)(n+4)}\, u_n,$$

and deduce the value of the integral $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(t)\cos^6(t)\, dt.$

Part C

For every $n \in \mathbb{N}$, set, $\quad x_n = (n+1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(2t)\sin^{2n}(t)\,dt$. Using integration by parts, show that, $\quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_n = \dfrac{\pi}{2} - u_{2n+2}$, then determine $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n$.

Part D

Let F be the function defined on $[0,+\infty[$ by, $\quad F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

(1) Show that, for every non-negative real number x, $\quad F(x) \leqslant \dfrac{1}{e} + \displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$.

(2) Show that the function F is strictly increasing on $[0,+\infty[$ (we admit that F has a finite limit at $+\infty$).

(3) Show that,

$$(\forall t \in [0,1]) \quad e^{-t^2} \geqslant 1 - t^2 \qquad \text{and} \qquad (\forall u \in [0,+\infty[) \quad e^{-u^2} \leqslant \frac{1}{1+u^2}.$$

For every $n \in \mathbb{N}$ and every $x \in [0,+\infty[$, set

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\,dt \qquad \text{and} \qquad J_n(x) = \int_0^x \frac{du}{(1+u^2)^n}.$$

(4) (a) Show that, $\quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad I_n = u_{2n+1}$.

(b) Show that, $\quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \displaystyle\lim_{x\to+\infty} J_n(x) = u_{2n-2}$.

(5) Show that, for every $n \in \mathbb{N}^*$,

(a) $\displaystyle\int_0^1 e^{-nt^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,dt$.

(b) $\displaystyle\int_0^1 e^{-nt^2}\,dt \geqslant \int_0^1 (1-t^2)^n\,dt$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) \geqslant \sqrt{n}\,u_{2n+1}$.

(6) Show that, for every $n \in \mathbb{N}^*$,

(a) $(\forall x \in [0,+\infty[) \quad \displaystyle\int_0^x e^{-nu^2}\,du \leqslant \int_0^x \frac{du}{(1+u^2)^n}$.

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \leqslant \sqrt{n}\, u_{2n-2}$.

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2}\, dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.