بسم الله الرحمن الرحيم

Professeur, Saad Choukri
Terminale SM

الأستاذ، سعد شكري
باكالوريا علوم رياضية

الموضوع 12 في التحليل. المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ وقانون نيوتن للتبريد

ملخص، يطبق هذا الموضوع المعادلات التفاضلية من نوع $y' = ay + b$ على وضعية فيزيائية، تبرد جسم ساخن داخل قاعة حرارتها ثابتة وفق قانون نيوتن. نكتب المعادلة التفاضلية التي تحققها درجة حرارة الجسم، ثم نحلها لحساب درجة الحرارة في لحظة معينة وتحديد المدة اللازمة لبلوغ درجة حرارة معينة.

في اللحظة $t = 0$ (بالساعات) وضع جسم درجة حرارته $100°\text{C}$ داخل قاعة درجة حرارتها $20°\text{C}$.
لتكن $\theta(t)$ درجة حرارة هذا الجسم في اللحظة t.
حسب قانون نيوتن للتبريد، سرعة التبريد $\theta'(t)$ لهذا الجسم متناسبة مع فرق درجة حرارة هذا الجسم ودرجة حرارة القاعة. معامل التناسب في هذه الحالة هو $-2{,}08$.

(1) حدد المعادلة التفاضلية التي تحققها الدالة $\theta : t \mapsto \theta(t)$.

(2) حدد درجة حرارة الجسم بعد مرور 30 دقيقة.

(3) حدد المدة الزمنية اللازمة لكي تصبح درجة حرارة الجسم $30°\text{C}$.

Sujet d'étude 12 en Analyse. Équation différentielle du type $y' = ay + b$. Loi de refroidissement de Newton

Résumé, Ce sujet applique les équations différentielles du type $y' = ay + b$ à une situation physique, le refroidissement d'un corps chaud placé dans une salle à température constante selon la loi de Newton. On écrit l'équation différentielle vérifiée par la température du corps, puis on la résout pour calculer la température à un instant donné et la durée nécessaire pour atteindre une température donnée.

À l'instant $t = 0$ (en heures), on place un corps de température 100°C dans une salle dont la température est 20°C. Soit $\theta(t)$ la température de ce corps à l'instant t.
D'après la loi de refroidissement de Newton, la vitesse de refroidissement $\theta'(t)$ de ce corps est proportionnelle à la différence entre la température du corps et celle de la salle. Le coefficient de proportionnalité vaut ici $-2{,}08$.

(1) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la fonction $\theta : t \mapsto \theta(t)$.

(2) Déterminer la température du corps au bout de 30 minutes.

(3) Déterminer la durée nécessaire pour que la température du corps atteigne 30°C.

Study Topic 12 in Analysis. A Differential Equation of the Form $y' = ay + b$. Newton's Law of Cooling

Summary, This topic applies differential equations of the form $y' = ay+b$ to a physical situation, the cooling of a hot body placed in a room at constant temperature according to Newton's law. We write the differential equation satisfied by the body's temperature, then solve it to compute the temperature at a given time and the time needed to reach a given temperature.

At time $t = 0$ (in hours), a body at temperature 100°C is placed in a room whose temperature is 20°C. Let $\theta(t)$ be the temperature of this body at time t.
According to Newton's law of cooling, the cooling rate $\theta'(t)$ of this body is proportional to the difference between the temperature of the body and that of the room. Here the proportionality coefficient is -2.08.

(1) Determine the differential equation satisfied by the function $\theta : t \mapsto \theta(t)$.

(2) Determine the temperature of the body after 30 minutes.

(3) Determine the time needed for the temperature of the body to reach 30°C.