بسم الله الرحمن الرحيم

Professeur, Saad Choukri
Terminale SM

الأستاذ، سعد شكري
باكالوريا علوم رياضية

الموضوع 10 في التحليل. دوال تحقق شرطا معينا

ملخص، نبحث في هذا الموضوع عن جميع الدوال f القابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}_+^*$ والتي تحقق $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. بواسطة تغيير المتغير $g(x) = f(e^x)$ نرد المسألة إلى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية بمعاملات ثابتة، ثم نحلها ونرجع إلى الدالة f.

لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}_+^*$ تحقق ما يلي،

(i) f قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}_+^*$.

(ii) $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

(1) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي، $g(x) = f(e^x)$.

(a) بين أنه لكل x من $\mathbb{R}_+^*$، $x^2 f''(x) + f(x) = 0$.

(b) استنتج أن الدالة g حل للمعادلة التفاضلية، $(E) \quad y'' - y' + y = 0$.

(2) حدد جميع الدوال f التي تحقق الشرطين (i) و (ii).

Sujet d'étude 10 en Analyse. Fonctions vérifiant une condition donnée

Résumé, On cherche toutes les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. Le changement de variable $g(x) = f(e^x)$ ramène le problème à une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, que l'on résout avant de revenir à f.

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant les conditions suivantes,

(i) f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

(ii) $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad f'(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(1) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par, $\quad g(x) = f(e^x)$.

(a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^2 f''(x) + f(x) = 0$.

(b) En déduire que la fonction g est solution de l'équation différentielle, $(E) \quad y'' - y' + y = 0$.

(2) Déterminer toutes les fonctions f vérifiant les conditions (i) et (ii).

Study Topic 10 in Analysis. Functions Satisfying a Given Condition

Summary, We look for all functions f, twice differentiable on $\mathbb{R}_+^*$, such that $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. The change of variable $g(x) = f(e^x)$ reduces the problem to a second-order linear differential equation with constant coefficients, which we solve before returning to f.

Let f be a function defined on $\mathbb{R}_+^*$ satisfying the following conditions,

(i) f is twice differentiable on $\mathbb{R}_+^*$.

(ii) $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad f'(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(1) Let g be the function defined on $\mathbb{R}$ by, $\quad g(x) = f(e^x)$.

(a) Show that, for every $x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^2 f''(x) + f(x) = 0$.

(b) Deduce that the function g is a solution of the differential equation, $(E) \quad y'' - y' + y = 0$.

(2) Determine all the functions f satisfying conditions (i) and (ii).