بسم الله الرحمن الرحيم

Professeur, Saad Choukri
Terminale SM

الأستاذ، سعد شكري
باكالوريا علوم رياضية

الموضوع 9 في التحليل. العدد e لا جذري

ملخص، نعتبر متتاليتين متحاذيتين $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}$، ثم نستعمل الدالة $H(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ ومتفاوتة التزايدات المنتهية لإثبات أن نهايتهما هي العدد e، ونستنتج من التحاذي أن e عدد لا جذري.

نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\geqslant 1}$ و $(v_n)_{n\geqslant 1}$ المعرفتين بما يلي،

$$v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}. \qquad \text{و} \qquad u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

(1) بين أن (u_n) و (v_n) متحاذيتان.

(2) نضع، $H(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

(a) بين أن، $(\forall x \in [0,1]) \quad |H'(x)| \leqslant \frac{1}{n!}$.

(b) باستعمال متفاوتة التزايدات المنتهية، بين أن، $\left|\frac{u_n}{e} - 1\right| \leqslant \frac{1}{n!}$.

(c) استنتج أن، $\lim_{n\to+\infty} u_n = e$، ثم أن، $e \notin \mathbb{Q}$.

Sujet d'étude 9 en Analyse.
Le nombre e est irrationnel

Résumé, On considère deux suites adjacentes $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}$, puis on utilise la fonction $H(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ et l'inégalité des accroissements finis pour montrer que leur limite commune est e. On déduit de l'adjacence que e est irrationnel.

On considère les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}.$$

(1) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

(2) On pose, $\quad H(x) = e^{-x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

(a) Montrer que, $\quad (\forall x \in [0,1]) \quad |H'(x)| \leqslant \dfrac{1}{n!}$.

(b) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que, $\left|\dfrac{u_n}{e} - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{n!}$.

(c) En déduire que, $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$, puis que, $\quad e \notin \mathbb{Q}$.

Study Topic 9 in Analysis.
The Number e Is Irrational

Summary, We consider two adjacent sequences $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ and $v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}$, then use the function $H(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ and the mean value inequality to show that their common limit is e. Adjacency then shows that e is irrational.

Consider the sequences $(u_n)_{n\geqslant 1}$ and $(v_n)_{n\geqslant 1}$ defined by

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \qquad \text{and} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}.$$

(1) Show that the sequences (u_n) and (v_n) are adjacent.

(2) Set, $\quad H(x) = e^{-x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

(a) Show that, $\quad (\forall x \in [0,1]) \quad |H'(x)| \leqslant \dfrac{1}{n!}$.

(b) Using the mean value inequality, show that, $\quad \left|\dfrac{u_n}{e} - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{n!}$.

(c) Deduce that, $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$, then that, $\quad e \notin \mathbb{Q}$.