بسم الله الرحمن الرحيم

Professeur, Saad Choukri
Terminale SM

الأستاذ، سعد شكري
باكالوريا علوم رياضية

الموضوع 8 في التحليل. تحديد قيم مقربة لنهاية متتالية

ملخص، نثبت أن المعادلة $4x^3+4x-1=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0,1[$، ونكتبها على شكل معادلة نقطة صامدة $f(x)=x$. نؤطر مشتقة f ثم نعرف متتالية ترجعية $u_{n+1}=f(u_n)$، ونستعمل مبرهنة التزايدات المنتهية لإثبات تقاربها نحو α وللحصول على قيمة مقربة لـ α بدقة معلومة.

(1) برهن على أن المعادلة $4x^3+4x-1=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,1[$.

(2) (a) برهن على أن α حل لمعادلة من الشكل $f(x)=x$، حيث f دالة عددية يتم تحديدها.

(b) برهن على أن، $(\forall x\in[0,1])\quad |f'(x)|\leqslant\dfrac{1}{2}$.

(3) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي،

$$\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2} \\ (\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$$

(a) برهن على أن، $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0<u_n\leqslant\dfrac{1}{2}$.

(b) برهن على أن، $(\forall n\in\mathbb{N})\quad |u_{n+1}-\alpha|\leqslant\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$.
استنتج أن (u_n) متقاربة وحدد نهايتها.

(c) باستعمال نتيجة السؤال السابق، حدد عددا صحيحا طبيعيا p بحيث يكون $|u_p-\alpha|\leqslant 10^{-2}$.

Sujet d'étude 8 en Analyse. Valeurs approchées de la limite d'une suite

Résumé, On montre que l'équation $4x^3 + 4x - 1 = 0$ admet une unique solution α dans $]0, 1[$ et on l'écrit sous la forme d'une équation de point fixe $f(x) = x$. On majore la dérivée de f, puis on définit la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ et on utilise l'inégalité des accroissements finis pour prouver sa convergence vers α et obtenir une valeur approchée de α à une précision donnée.

(1) Démontrer que l'équation $4x^3 + 4x - 1 = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0, 1[$.

(2) (a) Démontrer que α est solution d'une équation de la forme $f(x) = x$, où f est une fonction numérique à déterminer.

(b) Démontrer que, $(\forall x \in [0, 1]) \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

(3) Soit (u_n) la suite numérique définie par

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

(a) Démontrer que, $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.

(b) Démontrer que, $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

(c) À l'aide du résultat précédent, déterminer un entier naturel p tel que $|u_p - \alpha| \leqslant 10^{-2}$.

Study Topic 8 in Analysis.
Approximating the Limit of a Sequence

Summary, We prove that the equation $4x^3 + 4x - 1 = 0$ has a unique solution α in $]0, 1[$ and write it as a fixed-point equation $f(x) = x$. We bound the derivative of f, then define the recursive sequence $u_{n+1} = f(u_n)$ and use the mean value inequality to prove its convergence to α and to obtain an approximation of α to a given accuracy.

(1) Prove that the equation $4x^3 + 4x - 1 = 0$ has a unique solution α in the interval $]0, 1[$.

(2) (a) Prove that α is a solution of an equation of the form $f(x) = x$, where f is a function to be determined.

(b) Prove that, $(\forall x \in [0, 1]) \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

(3) Let (u_n) be the sequence defined by

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

(a) Prove that, $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.

(b) Prove that, $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
Deduce that the sequence (u_n) converges and determine its limit.

(c) Using the previous result, find a natural number p such that $|u_p - \alpha| \leqslant 10^{-2}$.