بسم الله الرحمن الرحيم

الأستاذ، سعد شكري
باكالوريا علوم رياضية

Professeur, Saad Choukri
Terminale SM

الموضوع 7 في التحليل. تقارب متتالية

ملخص، نعتبر في هذا الموضوع دالة f تقابلية ونستعمل تقابلها العكسي h لتعريف متتالية ترجعية $u_{n+1} = h(u_n)$. نثبت أن المتتالية تناقصية ومصغورة، ثم نؤطر مشتقة h بواسطة مشتقة f، ونطبق مبرهنة التزايدات المنتهية للحصول على تقارب المتتالية وتحديد نهايتها.

(1) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I = [0, +\infty[$ بما يلي،

$$f(x) = 1 + \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

(a) بين أن f تقابل من I إلى مجموعة J يتم تحديدها.

(b) ليكن h التقابل العكسي للدالة f. حدد منحى تغيرات h على J.

(2) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث، $1 < u_0 \leqslant 2$ و $u_{n+1} = h(u_n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

(a) بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$، $u_n > 1$.

(b) استنتج أن (u_n) متتالية تناقصية.

(c) بين أنه لكل x من $[1, \sqrt{3}]$، $\frac{3\sqrt{3}}{4} \leqslant f'(x) \leqslant \sqrt{2}$.

(d) استنتج أنه لكل x من $[1, 2]$، $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant h'(x) \leqslant \frac{4\sqrt{3}}{9}$.

(3) (a) بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$، $0 < u_{n+1} - 1 \leqslant \frac{4\sqrt{3}}{9}(u_n - 1)$.

(b) استنتج أن (u_n) متقاربة وحدد نهايتها.

Sujet d'étude 7 en Analyse.
Convergence d'une suite

Résumé, On considère une fonction bijective f et on utilise sa réciproque h pour définir une suite récurrente $u_{n+1} = h(u_n)$. On montre que la suite est décroissante et minorée, puis on encadre la dérivée de h à l'aide de celle de f et on applique l'inégalité des accroissements finis pour obtenir la convergence de la suite et sa limite.

(1) Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

(a) Montrer que f est une bijection de I sur un ensemble J à déterminer.

(b) Soit h la bijection réciproque de f. Déterminer le sens de variation de h sur J.

(2) On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $1 < u_0 \leqslant 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = h(u_n)$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n > 1$.

(b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

(c) Montrer que, pour tout $x \in [1, \sqrt{3}]$, $\quad \dfrac{3\sqrt{3}}{4} \leqslant f'(x) \leqslant \sqrt{2}$.

(d) En déduire que, pour tout $x \in [1, 2]$, $\quad \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqslant h'(x) \leqslant \dfrac{4\sqrt{3}}{9}$.

(3) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad 0 < u_{n+1} - 1 \leqslant \dfrac{4\sqrt{3}}{9}(u_n - 1)$.

(b) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Study Topic 7 in Analysis.
Convergence of a Sequence

Summary, We consider a bijective function f and use its inverse h to define a recursive sequence $u_{n+1} = h(u_n)$. We show that the sequence is decreasing and bounded below, then bound the derivative of h using that of f and apply the mean value inequality to obtain the convergence of the sequence and its limit.

(1) Let f be the function defined on the interval $I = [0, +\infty[$ by

$$f(x) = 1 + \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

(a) Show that f is a bijection from I onto a set J to be determined.

(b) Let h be the inverse bijection of f. Determine the direction of variation of h on J.

(2) Consider the sequence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ such that, $1 < u_0 \leqslant 2$ and $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_{n+1} = h(u_n)$.

(a) Show that, for every $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

(b) Deduce that the sequence (u_n) is decreasing.

(c) Show that, for every $x \in [1, \sqrt{3}]$, $\dfrac{3\sqrt{3}}{4} \leqslant f'(x) \leqslant \sqrt{2}$.

(d) Deduce that, for every $x \in [1, 2]$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqslant h'(x) \leqslant \dfrac{4\sqrt{3}}{9}$.

(3) (a) Show that, for every $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} - 1 \leqslant \dfrac{4\sqrt{3}}{9}(u_n - 1)$.

(b) Deduce that the sequence (u_n) converges and determine its limit.