بسم الله الرحمن الرحيم

**الأستاذ، سعد شكري** — **Professeur,** Saad Choukri
**باكالوريا علوم رياضية** — **Terminale SM**

# الموضوع 6 في التحليل. متتالية دوال والدالة الأسية

**ملخص،** ندرس في الجزء الأول المتتاليتين $a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ و $b_n = \frac{n^n}{n!}$ ونثبت أن $(a_n)$ تؤول إلى $\frac{1}{e}$. وفي الجزء الثاني نعتبر الدوال الحدودية $f_k$ المستخرجة من النشر المحدود للدالة $x \mapsto e^{-x}$، فنؤطر بها هذه الدالة، وندرس الحل الوحيد $x_n$ للمعادلة $f_{2n-1}(x) = 0$ وسلوكه المقارب.

## الجزء A

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفتين بما يلي، $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ و $b_n = \dfrac{n^n}{n!}$.

**(1)** بين أن، $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad n\ln(a_n) + \ln(b_n) = 0$.

**(2)** (a) بين أن، $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad b_{n+1} = b_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

(b) بين أن، $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \geqslant 2$.

(c) استنتج أنه لكل عدد صحيح طبيعي $n \geqslant 6$، لدينا، $b_n \geqslant 2^n$.

(d) بين أن $(a_n)_{n\geqslant 6}$ متتالية مكبورة.

**(3)** (a) حدد النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right)$.

(b) بين أن، $(\forall x \in \mathbb{R}_+) \quad 0 \leqslant x - \ln(1+x) \leqslant \dfrac{x^2}{2}$.

(c) استنتج أن، $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 0 \leqslant 1 + \ln(b_n) - \ln(b_{n+1}) \leqslant \dfrac{1}{2n}$.

(d) بين أن، $(\forall x \in [0,1[) \quad x \leqslant -\ln(1-x)$.

(e) استنتج أن، $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leqslant 1 + \ln n$.

(f) حدد، $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln(b_n)$.

(g) ادرس نهاية المتتالية $(a_n)_{n\geqslant 1}$.

**الجزء B**

لكل عدد صحيح طبيعي $k$، نعتبر الدالة العددية $f_k$ المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بما يلي،

$$f_k(x) = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \frac{x^p}{p!} = 1 - \frac{x}{1!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^k}{k!}.$$

**(1)** حدد $f'_{k+1}$ بدلالة $f_k$.

**(2)** (a) بين أن، $(\forall x \in \mathbb{R}_+)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad f_{2n+1}(x) \leqslant e^{-x} \leqslant f_{2n}(x)$.
(يمكنك استعمال برهان بالترجع واستثمار تغيرات $x \mapsto f_k(x) - e^{-x}$).

(b) بين أن $f_{2n+1}$ تناقصية قطعا على $\mathbb{R}_+$ لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم $n$.

(c) بين أنه لكل $n$ من $\mathbb{N}^*$، فإن المعادلة $f_{2n-1}(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $x_n$ في $\mathbb{R}_+$.

(d) احسب $f'_{2n}(x_n)$ ثم حدد جدولي تغيرات $f_{2n-1}$ و $f_{2n}$.

**(3)** ليكن $n$ عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.

(a) بين أن،

$$f_{2n+1}(x_n) = \frac{x_n^{2n}}{(2n)!}\left(1 - \frac{x_n}{2n+1}\right) \quad \text{و} \quad f_{2n}(x_n) = \frac{x_n^{2n}}{(2n)!}.$$

(b) استنتج أن، $x_n^{2n} \leqslant (2n)!$.

(c) بين أنه إذا كان $n \geqslant 3$، فإن $x_n \leqslant n$.

(d) بين أن $f_{2n}(x_n) > 0$ ثم استنتج أن المتتالية $(x_n)$ تزايدية.

**(4)** (a) بين أن، $1 \leqslant \frac{x_n^{2n}}{(2n)!} e^{x_n} \leqslant 2$.

(b) نضع، $y_n = \frac{x_n}{2n}$. بين أن، $a_{2n} \leqslant y_n e^{y_n} \leqslant 2^{\frac{1}{2n}} a_{2n}$.

(c) استنتج أن، $\lim_{n\to+\infty} y_n e^{y_n} = \frac{1}{e}$ .

**(5)** (a) ادرس على $\mathbb{R}_+$ تغيرات الدالة $\varphi$ المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بما يلي، $\varphi(t) = e^{-1-t}$.

(b) بين أنه يوجد عدد وحيد موجب $\alpha$ بحيث، $\varphi(\alpha) = \alpha$.

**(6)** بين أن، $\lim_{n\to+\infty} y_n = \alpha$ ، ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty} x_n$ .

# Sujet d'étude 6 en Analyse. Suite de fonctions et fonction exponentielle

**Résumé,** La première partie étudie les suites $a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ et $b_n = \frac{n^n}{n!}$ et établit que $(a_n)$ tend vers $\frac{1}{e}$. La seconde partie considère les polynômes $f_k$ issus du développement de $x \mapsto e^{-x}$, qui encadrent cette fonction, puis étudie l'unique solution $x_n$ de l'équation $f_{2n-1}(x) = 0$ et son comportement asymptotique.

## Partie A

On considère les suites numériques $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par, $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ et $b_n = \dfrac{n^n}{n!}$.

**(1)** Montrer que, $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad n\ln(a_n) + \ln(b_n) = 0$.

**(2)** (a) Montrer que, $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad b_{n+1} = b_n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

(b) Montrer que, $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \geqslant 2$.

(c) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 6$, $\quad b_n \geqslant 2^n$.

(d) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 6}$ est majorée.

**(3)** (a) Déterminer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right)$.

(b) Montrer que, $(\forall x \in \mathbb{R}_+) \quad 0 \leqslant x - \ln(1+x) \leqslant \dfrac{x^2}{2}$.

(c) En déduire que, $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 0 \leqslant 1 + \ln(b_n) - \ln(b_{n+1}) \leqslant \dfrac{1}{2n}$.

(d) Montrer que, $(\forall x \in [0,1[) \quad x \leqslant -\ln(1-x)$.

(e) En déduire que, $1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} \leqslant 1 + \ln n$.

(f) Déterminer, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\ln(b_n)$.

(g) Étudier la limite de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$.

**Partie B**

Pour tout entier naturel $k$, on considère la fonction numérique $f_k$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_k(x) = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \frac{x^p}{p!} = 1 - \frac{x}{1!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^k}{k!}.$$

**(1)** Exprimer $f'_{k+1}$ en fonction de $f_k$.

**(2)** (a) Montrer que, $(\forall x \in \mathbb{R}_+)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad f_{2n+1}(x) \leqslant e^{-x} \leqslant f_{2n}(x)$.
(On pourra raisonner par récurrence et exploiter les variations de $x \mapsto f_k(x) - e^{-x}$.)

(b) Montrer que $f_{2n+1}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ pour tout entier naturel non nul $n$.

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_{2n-1}(x) = 0$ admet une unique solution $x_n$ dans $\mathbb{R}_+$.

(d) Calculer $f'_{2n}(x_n)$, puis dresser les tableaux de variations de $f_{2n-1}$ et de $f_{2n}$.

**(3)** Soit $n$ un entier naturel non nul.

(a) Montrer que,

$$f_{2n}(x_n) = \frac{x_n^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{et} \qquad f_{2n+1}(x_n) = \frac{x_n^{2n}}{(2n)!}\left(1 - \frac{x_n}{2n+1}\right).$$

(b) En déduire que, $x_n^{2n} \leqslant (2n)!$.

(c) Montrer que si $n \geqslant 3$, alors $x_n \leqslant n$.

(d) Montrer que $0 < f_{2n}(x_n)$, puis en déduire que la suite $(x_n)$ est croissante.

**(4)** (a) Montrer que, $1 \leqslant \dfrac{x_n^{2n}}{(2n)!}\, e^{x_n} \leqslant 2$.

(b) On pose, $y_n = \dfrac{x_n}{2n}$. Montrer que, $a_{2n} \leqslant y_n e^{y_n} \leqslant 2^{\frac{1}{2n}} a_{2n}$.

(c) En déduire que, $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n e^{y_n} = \dfrac{1}{e}$.

**(5)** (a) Étudier sur $\mathbb{R}_+$ les variations de la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par, $\varphi(t) = e^{-1-t}$.

(b) Montrer qu'il existe un unique réel positif $\alpha$ tel que, $\varphi(\alpha) = \alpha$.

**(6)** Montrer que, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \alpha$, puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

# Study Topic 6 in Analysis. A Sequence of Functions and the Exponential Function

**Summary,** The first part studies the sequences $a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ and $b_n = \frac{n^n}{n!}$ and proves that $(a_n)$ tends to $\frac{1}{e}$. The second part considers the polynomials $f_k$ obtained from the expansion of $x \mapsto e^{-x}$, which bound this function, then studies the unique solution $x_n$ of the equation $f_{2n-1}(x) = 0$ and its asymptotic behaviour.

## Part A

Consider the sequences $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ and $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ defined by, $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ and $b_n = \dfrac{n^n}{n!}$.

**(1)** Show that, $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad n\ln(a_n) + \ln(b_n) = 0$.

**(2)** (a) Show that, $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad b_{n+1} = b_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

(b) Show that, $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \geqslant 2$.

(c) Deduce that, for every natural number $n \geqslant 6$, $\quad b_n \geqslant 2^n$.

(d) Show that the sequence $(a_n)_{n\geqslant 6}$ is bounded above.

**(3)** (a) Determine the limit $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right)$.

(b) Show that, $(\forall x \in \mathbb{R}_+) \quad 0 \leqslant x - \ln(1+x) \leqslant \dfrac{x^2}{2}$.

(c) Deduce that, $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 0 \leqslant 1 + \ln(b_n) - \ln(b_{n+1}) \leqslant \dfrac{1}{2n}$.

(d) Show that, $(\forall x \in [0,1[) \quad x \leqslant -\ln(1-x)$.

(e) Deduce that, $1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} \leqslant 1 + \ln n$.

(f) Determine, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\ln(b_n)$.

(g) Study the limit of the sequence $(a_n)_{n\geqslant 1}$.

**Part B**

For every natural number $k$, consider the function $f_k$ defined on $\mathbb{R}_+$ by

$$f_k(x) = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \frac{x^p}{p!} = 1 - \frac{x}{1!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^k}{k!}.$$

**(1)** Express $f'_{k+1}$ in terms of $f_k$.

**(2)** (a) Show that, $(\forall x \in \mathbb{R}_+)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad f_{2n+1}(x) \leqslant e^{-x} \leqslant f_{2n}(x)$.
(You may use induction and the variations of $x \mapsto f_k(x) - e^{-x}$.)

(b) Show that $f_{2n+1}$ is strictly decreasing on $\mathbb{R}_+$ for every non-zero natural number $n$.

(c) Show that, for every $n \in \mathbb{N}^*$, the equation $f_{2n-1}(x) = 0$ has a unique solution $x_n$ in $\mathbb{R}_+$.

(d) Compute $f'_{2n}(x_n)$, then draw up the variation tables of $f_{2n-1}$ and $f_{2n}$.

**(3)** Let $n$ be a non-zero natural number.

(a) Show that,

$$f_{2n}(x_n) = \frac{x_n^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{and} \qquad f_{2n+1}(x_n) = \frac{x_n^{2n}}{(2n)!}\left(1 - \frac{x_n}{2n+1}\right).$$

(b) Deduce that, $x_n^{2n} \leqslant (2n)!$.

(c) Show that if $n \geqslant 3$, then $x_n \leqslant n$.

(d) Show that $0 < f_{2n}(x_n)$, then deduce that the sequence $(x_n)$ is increasing.

**(4)** (a) Show that, $1 \leqslant \frac{x_n^{2n}}{(2n)!} e^{x_n} \leqslant 2$.

(b) Set, $y_n = \frac{x_n}{2n}$. Show that, $a_{2n} \leqslant y_n e^{y_n} \leqslant 2^{\frac{1}{2n}} a_{2n}$.

(c) Deduce that, $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n e^{y_n} = \frac{1}{e}$.

**(5)** (a) Study on $\mathbb{R}_+$ the variations of the function $\varphi$ defined on $\mathbb{R}_+$ by, $\varphi(t) = e^{-1-t}$.

(b) Show that there exists a unique positive real number $\alpha$ such that, $\varphi(\alpha) = \alpha$.

**(6)** Show that, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \alpha$, then deduce $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.