بسم الله الرحمن الرحيم

Professeur, Saad Choukri
Terminale SM

الأستاذ، سعد شكري
باكالوريا علوم رياضية

الموضوع 5 في التحليل. الدالة $\ln$ والمتتاليات

ملخص، ندرس في الجزء الأول الدالة $f : x \mapsto \frac{x \ln x}{x+1}$ بالاستعانة بدالة مساعدة تنعدم في نقطة وحيدة. وفي الجزء الثاني نعتبر الحل الوحيد α_n للمعادلة $f(x) = n$، فنقارنه بـ e^n ونحدد نهاية $\frac{\alpha_n}{e^n}$، ثم نستعمل تأطيرات دقيقة لحساب نهاية $e^n + n - \alpha_n$.

الجزء A

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي، $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x+1}$.

(1) لتكن φ الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي، $\varphi(x) = x + 1 + \ln x$.

(a) ادرس تغيرات الدالة φ.

(b) بين أن المعادلة $\varphi(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β بحيث $0{,}27 \leqslant \beta \leqslant 0{,}28$.

(2) (a) ليكن x من $]0, +\infty[$. اكتب $f'(x)$ بدلالة $\varphi(x)$ واستنتج تغيرات f.

(b) حدد نهايتي f عند 0 وعند $+\infty$.

الجزء B

ليكن n من $\mathbb{N}^*$. الهدف من هذا الجزء هو دراسة المعادلة $f(x) = n$.

(1) بين أن المعادلة $f(x) = n$ تقبل حلا وحيدا α_n.

(2) (a) بين أن $f(e^n) \leqslant n$ ثم استنتج أن $\alpha_n \geqslant e^n$.

(b) بين أن $\ln\left(\dfrac{\alpha_n}{e^n}\right) = \dfrac{n}{\alpha_n}$ ثم حدد النهاية $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\alpha_n}{e^n}$.

(3) نضع $\varepsilon_n = \dfrac{\alpha_n}{e^n} - 1$.

(a) تحقق أن $\varepsilon_n \geqslant 0$ واكتب $(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n)$ بدلالة n.

(b) ليكن $t \geqslant 0$. بين أن، $0 \leqslant (1+t)\ln(1+t) - t \leqslant \dfrac{t^2}{2}$.

(c) ليكن n من $\mathbb{N}^*$. بين أن، $\varepsilon_n \leqslant ne^{-n} \leqslant \varepsilon_n + \dfrac{\varepsilon_n^2}{2}$، ثم أن، $0 \leqslant ne^{-n} - \varepsilon_n \leqslant \dfrac{n^2}{2}e^{-2n}$.

(d) احسب النهاية، $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e^n + n - \alpha_n\right)$.

Sujet d'étude 5 en Analyse.
La fonction ln et les suites

Résumé, La première partie étudie la fonction $f : x \mapsto \frac{x \ln x}{x+1}$ à l'aide d'une fonction auxiliaire qui s'annule en un point unique. La seconde partie considère l'unique solution α_n de l'équation $f(x) = n$, la compare à e^n et détermine la limite de $\frac{\alpha_n}{e^n}$, puis utilise des encadrements fins pour calculer la limite de $e^n + n - \alpha_n$.

Partie A

Soit f la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par, $\quad f(x) = \dfrac{x \ln x}{x+1}$.

(1) Soit φ la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par, $\quad \varphi(x) = x+1+\ln x$.

(a) Étudier les variations de φ.

(b) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution β telle que $0{,}27 \leqslant \beta \leqslant 0{,}28$.

(2) (a) Soit $x \in]0, +\infty[$. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$ et en déduire les variations de f.

(b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Partie B

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de cette partie est d'étudier l'équation $f(x) = n$.

(1) Montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution α_n.

(2) (a) Montrer que $f(e^n) \leqslant n$, puis en déduire que $\alpha_n \geqslant e^n$.

(b) Montrer que $\ln\left(\dfrac{\alpha_n}{e^n}\right) = \dfrac{n}{\alpha_n}$, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_n}{e^n}$.

(3) On pose $\varepsilon_n = \dfrac{\alpha_n}{e^n} - 1$.

(a) Vérifier que $\varepsilon_n \geqslant 0$ et exprimer $(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n)$ en fonction de n.

(b) Soit $t \geqslant 0$. Montrer que, $\quad 0 \leqslant (1+t)\ln(1+t) - t \leqslant \dfrac{t^2}{2}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, $\varepsilon_n \leqslant ne^{-n} \leqslant \varepsilon_n + \dfrac{\varepsilon_n^2}{2}$, puis que, $0 \leqslant ne^{-n} - \varepsilon_n \leqslant \dfrac{n^2}{2}e^{-2n}$.

(d) Calculer la limite, $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(e^n + n - \alpha_n\big)$.

Study Topic 5 in Analysis. The Function ln and Sequences

Summary, The first part studies the function $f : x \mapsto \frac{x \ln x}{x+1}$ using an auxiliary function that vanishes at a single point. The second part considers the unique solution α_n of the equation $f(x) = n$, compares it with e^n and finds the limit of $\frac{\alpha_n}{e^n}$, then uses sharp bounds to compute the limit of $e^n + n - \alpha_n$.

Part A

Let f be the function defined on $]0, +\infty[$ by, $\quad f(x) = \dfrac{x \ln x}{x+1}$.

(1) Let φ be the function defined on $]0, +\infty[$ by, $\quad \varphi(x) = x + 1 + \ln x$.

(a) Study the variations of φ.

(b) Show that the equation $\varphi(x) = 0$ has a unique solution β such that $0.27 \leqslant \beta \leqslant 0.28$.

(2) (a) Let $x \in]0, +\infty[$. Express $f'(x)$ in terms of $\varphi(x)$ and deduce the variations of f.

(b) Determine the limits of f at 0 and at $+\infty$.

Part B

Let $n \in \mathbb{N}^*$. The aim of this part is to study the equation $f(x) = n$.

(1) Show that the equation $f(x) = n$ has a unique solution α_n.

(2) (a) Show that $f(e^n) \leqslant n$, then deduce that $\alpha_n \geqslant e^n$.

(b) Show that $\ln\left(\dfrac{\alpha_n}{e^n}\right) = \dfrac{n}{\alpha_n}$, then determine $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\alpha_n}{e^n}$.

(3) Set $\varepsilon_n = \dfrac{\alpha_n}{e^n} - 1$.

(a) Check that $\varepsilon_n \geqslant 0$ and express $(1 + \varepsilon_n) \ln(1 + \varepsilon_n)$ in terms of n.

(b) Let $t \geqslant 0$. Show that, $\quad 0 \leqslant (1+t)\ln(1+t) - t \leqslant \dfrac{t^2}{2}$.

(c) Let $n \in \mathbb{N}^*$. Show that, $\varepsilon_n \leqslant ne^{-n} \leqslant \varepsilon_n + \dfrac{\varepsilon_n^2}{2}$, then that, $0 \leqslant ne^{-n} - \varepsilon_n \leqslant \dfrac{n^2}{2}e^{-2n}$.

(d) Compute the limit, $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(e^n + n - \alpha_n\big)$.