بسم الله الرحمن الرحيم

Professeur, Saad Choukri
Terminale SM

الأستاذ، سعد شكري
باكالوريا علوم رياضية

الموضوع 4 في التحليل. الدوال المحدبة ومتفاوتات التحدب

ملخص، ينطلق هذا الموضوع من مفهوم الجزء المحدب من المستوى ليعرف الدالة المحدبة بواسطة تحدب المجموعة الواقعة فوق منحناها. نثبت التمييز الكلاسيكي للتحدب ومتفاوتة ينسن، وخاصيات العمليات والدالة العكسية، وتمييز التحدب بواسطة تزايد ميل الأوتار ثم بواسطة تزايد الدالة المشتقة، ونطبق ذلك لإثبات متفاوتات شهيرة مثل متفاوتة جوردان ومتفاوتة كوشي-شفارتز ومتفاوتة المتوسطين الحسابي والهندسي.

الجزء A

ليكن $\mathcal{C}$ جزءا من المستوى. نقول إن $\mathcal{C}$ محدب إذا كان $[MN] \subset \mathcal{C}$ لكل M و N من $\mathcal{C}$.

(1) بين أن كل قرص هو جزء محدب.

(2) نعتبر في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ المجموعة

$$\mathcal{F} = \{M(x, y) \mid x(y + 2) < 0\}.$$

هل $\mathcal{F}$ جزء محدب؟

الجزء B

لتكن f دالة معرفة على مجال I حيث $I \subset D_f$، وليكن المستوى منسوبا إلى معلم متعامد $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. ليكن $\mathcal{C}_f$ منحنى f ولتكن المجموعة

$$\mathcal{E}_f = \{M(x, y) \mid x \in I \text{ و } f(x) \leqslant y\}.$$

نقول إن f محدبة على I إذا كانت المجموعة $\mathcal{E}_f$ محدبة، ونقول إن f مقعرة إذا كانت $-f$ محدبة.

(1) بين أن كل دالة تآلفية هي دالة محدبة على $\mathbb{R}$.

(2) بين أن دالة f معرفة على مجال I تكون محدبة على I إذا وفقط إذا كان،

$$(\forall (x_1, x_2) \in I^2)(\forall \lambda \in [0, 1]) \quad f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

(3) لتكن f دالة محدبة على مجال I. بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ ولكل $x_1, x_2, \ldots, x_n$ من I ولكل $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ من $\mathbb{R}_+$ بحيث $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$، فإن،

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

(4) لتكن f دالة تآلفية. نفترض أنه توجد دالتان g و h محدبتان على $\mathbb{R}$ بحيث $f = g + h$. بين أن g و h تآلفيتان.

(5) لتكن f دالة محدبة على مجال I و $J = f(I)$. نفترض أن f تقابل من I نحو J. بين أنه إذا كانت f تناقصية على I فإن f^{-1} محدبة على J، وإذا كانت f تزايدية على I فإن f^{-1} مقعرة على J.

(6) بين أن الدالتين $x \mapsto x^2$ و $x \mapsto |x|$ محدبتان على $\mathbb{R}$.

(7) بين أن مجموع دالتين محدبتين على مجال I هو دالة محدبة على I.

(8) لتكن f دالة معرفة على مجال I وليكن $a \in I$. نعتبر الدالة φ_a المعرفة على $I \setminus \{a\}$ بما يلي، $\varphi_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. بين أن f تكون محدبة على I إذا وفقط إذا كان،

$$(\forall a \in I)\big(\forall (x,t) \in (I \setminus \{a\})^2\big) \quad \big(x \leqslant t \Rightarrow \varphi_a(x) \leqslant \varphi_a(t)\big).$$

(9) لتكن f دالة معرفة على مجال I وقابلة للاشتقاق على I.

(a) بين أنه إذا كانت f محدبة، فإن f' تزايدية على I.

(b) نفترض أن f' تزايدية على I. ليكن $\lambda \in [0,1]$ وليكن x_1 و x_2 عددين من I بحيث $x_1 < x_2$. نعتبر الدالة ψ_λ المعرفة بما يلي،

$$\psi_\lambda(x) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x) - f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x\big).$$

- بين أن، $(\forall x \in [x_1, x_2]) \quad \psi_\lambda(x) \geqslant 0$.
- استنتج أن f محدبة على I.

(10) تطبيقات.

(a) بين أن الدالة $\sin$ مقعرة على $[0, \pi]$، ثم استنتج أن، $\dfrac{2x}{\pi} \leqslant \sin x \quad \big(\forall x \in \big[0, \tfrac{\pi}{2}\big]\big)$.

(b) باستعمال تحدب الدالة $x \mapsto x^2$ الذي تم إثباته في السؤال (6)، بين أن،

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n)(\forall (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n)$$
$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big).$$

(c) بين أن،

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\big(\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n\big) \quad \Big(\prod_{k=1}^{n} x_k\Big)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Sujet d'étude 4 en Analyse. Fonctions convexes et inégalités de convexité

Résumé, Ce sujet part de la notion de partie convexe du plan pour définir une fonction convexe par la convexité de l'ensemble situé au-dessus de sa courbe. On établit la caractérisation classique de la convexité, l'inégalité de Jensen, des propriétés liées aux opérations et à la réciproque, puis la caractérisation par la croissance des pentes et par la croissance de la dérivée. On l'applique à des inégalités célèbres, celles de Jordan, de Cauchy-Schwarz et l'inégalité arithmético-géométrique.

Partie A

Soit $\mathcal{C}$ une partie du plan. On dit que $\mathcal{C}$ est convexe si $[MN] \subset \mathcal{C}$ pour tous points M et N de $\mathcal{C}$.

(1) Montrer que tout disque est une partie convexe.

(2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère l'ensemble $\mathcal{F} = \{M(x, y) \mid x(y + 2) < 0\}$. L'ensemble $\mathcal{F}$ est-il convexe ?

Partie B

Soit f une fonction définie sur un intervalle I avec $I \subset D_f$, le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe de f et soit l'ensemble $\mathcal{E}_f = \{M(x, y) \mid x \in I \text{ et } f(x) \leqslant y\}$. On dit que f est convexe sur I si l'ensemble $\mathcal{E}_f$ est convexe, et que f est concave si $-f$ est convexe.

(1) Montrer que toute fonction affine est convexe sur $\mathbb{R}$.

(2) Montrer qu'une fonction f définie sur un intervalle I est convexe sur I si et seulement si

$$(\forall (x_1, x_2) \in I^2)(\forall \lambda \in [0, 1]) \quad f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

(3) Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de I et pour tous $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de $\mathbb{R}_+$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$,

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

(4) Soit f une fonction affine. On suppose qu'il existe deux fonctions g et h convexes sur $\mathbb{R}$ telles que $f = g + h$. Montrer que g et h sont affines.

(5) Soit f une fonction convexe sur un intervalle I et $J = f(I)$. On suppose que f est une bijection de I sur J. Montrer que si f est décroissante sur I alors f^{-1} est convexe sur J, et que si f est croissante sur I alors f^{-1} est concave sur J.

(6) Montrer que les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto |x|$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.

(7) Montrer que la somme de deux fonctions convexes sur un intervalle I est convexe sur I.

(8) Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$. On considère la fonction φ_a définie sur $I \setminus \{a\}$ par, $\varphi_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Montrer que f est convexe sur I si et seulement si

$$(\forall a \in I)\big(\forall (x,t) \in (I \setminus \{a\})^2\big) \quad \big(x \leqslant t \Rightarrow \varphi_a(x) \leqslant \varphi_a(t)\big).$$

(9) Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

(a) Montrer que si f est convexe, alors f' est croissante sur I.

(b) On suppose que f' est croissante sur I. Soit $\lambda \in [0,1]$ et soient x_1 et x_2 deux éléments de I tels que $x_1 < x_2$. On considère la fonction ψ_λ définie par,

$$\psi_\lambda(x) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x) - f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x\big).$$

- Montrer que, $(\forall x \in [x_1, x_2]) \quad \psi_\lambda(x) \geqslant 0$.
- En déduire que f est convexe sur I.

(10) Applications.

(a) Montrer que la fonction sin est concave sur $[0, \pi]$, puis en déduire que, $\big(\forall x \in \big[0, \frac{\pi}{2}\big]\big) \quad \dfrac{2x}{\pi} \leqslant \sin x$.

(b) En utilisant la convexité de la fonction $x \mapsto x^2$ établie à la question (6), montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n)(\forall (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n)$$
$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big).$$

(c) Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\big(\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n\big) \quad \Big(\prod_{k=1}^{n} x_k\Big)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Study Topic 4 in Analysis. Convex Functions and Convexity Inequalities

Summary, Starting from the notion of a convex subset of the plane, this topic defines a convex function through the convexity of the set lying above its graph. We prove the classical characterisation of convexity, Jensen's inequality, properties related to operations and inverse functions, then the characterisations by increasing slopes and by an increasing derivative. These are applied to famous inequalities, namely Jordan's, Cauchy-Schwarz and the arithmetic-geometric mean inequality.

Part A

Let $\mathcal{C}$ be a subset of the plane. We say that $\mathcal{C}$ is convex if $[MN] \subset \mathcal{C}$ for all points M and N of $\mathcal{C}$.

(1) Show that every disc is a convex subset.

(2) In the plane equipped with an orthonormal frame $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, consider the set $\mathcal{F} = \{M(x, y) \mid x(y + 2) < 0\}$. Is $\mathcal{F}$ convex?

Part B

Let f be a function defined on an interval I with $I \subset D_f$, the plane being equipped with an orthonormal frame $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Let $\mathcal{C}_f$ be the graph of f and let $\mathcal{E}_f = \{M(x, y) \mid x \in I \text{ and } f(x) \leqslant y\}$. We say that f is convex on I if the set $\mathcal{E}_f$ is convex, and that f is concave if $-f$ is convex.

(1) Show that every affine function is convex on $\mathbb{R}$.

(2) Show that a function f defined on an interval I is convex on I if and only if

$$(\forall (x_1, x_2) \in I^2)(\forall \lambda \in [0, 1]) \quad f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

(3) Let f be a convex function on an interval I. Show that for every $n \in \mathbb{N}^*$, all $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in I and all $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ in $\mathbb{R}_+$ such that $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$,

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

(4) Let f be an affine function. Assume that there exist two functions g and h, convex on $\mathbb{R}$, such that $f = g + h$. Show that g and h are affine.

(5) Let f be a convex function on an interval I and $J = f(I)$. Assume that f is a bijection from I onto J. Show that if f is decreasing on I then f^{-1} is convex on J, and if f is increasing on I then f^{-1} is concave on J.

(6) Show that the functions $x \mapsto x^2$ and $x \mapsto |x|$ are convex on $\mathbb{R}$.

(7) Show that the sum of two convex functions on an interval I is convex on I.

(8) Let f be a function defined on an interval I and let $a \in I$. Consider the function φ_a defined on $I \setminus \{a\}$ by, $\varphi_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Show that f is convex on I if and only if

$$(\forall a \in I)\big(\forall (x,t) \in (I \setminus \{a\})^2\big) \quad \big(x \leqslant t \Rightarrow \varphi_a(x) \leqslant \varphi_a(t)\big).$$

(9) Let f be a function defined and differentiable on an interval I.

(a) Show that if f is convex, then f' is increasing on I.

(b) Assume that f' is increasing on I. Let $\lambda \in [0,1]$ and let x_1 and x_2 be two elements of I such that $x_1 < x_2$. Consider the function ψ_λ defined by,

$$\psi_\lambda(x) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x) - f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x\big).$$

- Show that, $(\forall x \in [x_1, x_2]) \quad \psi_\lambda(x) \geqslant 0$.
- Deduce that f is convex on I.

(10) Applications.

(a) Show that the function sin is concave on $[0, \pi]$, then deduce that, $\big(\forall x \in \big[0, \frac{\pi}{2}\big]\big) \quad \dfrac{2x}{\pi} \leqslant \sin x$.

(b) Using the convexity of $x \mapsto x^2$ proved in question (6), show that

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n)(\forall (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n)$$
$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big).$$

(c) Show that

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\big(\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n\big) \quad \Big(\prod_{k=1}^{n} x_k\Big)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$