بسم الله الرحمن الرحيم

Professeur, Saad Choukri
Terminale SM

الأستاذ، سعد شكري
باكالوريا علوم رياضية

الموضوع 3 في التحليل. العدد الذهبي ومتتالية فيبوناتشي

ملخص، يتمحور هذا الموضوع حول العدد الذهبي $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. ندرس متتاليات معرفة بواسطة الجزء الصحيح للمضاعفات $n\omega$، ثم متتالية فيبوناتشي، صيغتها الصريحة وتقارب خارج حدين متتابعين نحو ω ومتسلسلة مرتبطة بها، ونختم بوصف مجموعة من الأزواج الصحيحة بواسطة الجزء الصحيح.

الجزء A

العدد الذهبي هو العدد الحقيقي الموجب ω حيث $\omega = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. تحقق أن، $\omega^2 = \omega + 1$ و $\dfrac{1}{\omega} = \omega - 1$.

الجزء B

لتكن $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية قطعا لأعداد صحيحة طبيعية. بين أن، $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \lambda_n \geqslant n$، ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n$.

الجزء C

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفتين بما يلي،

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \qquad \begin{cases} x_n = E(n\omega) \\ y_n = E(x_n\omega) + 1 \end{cases}$$

حيث $E(t)$ يمثل الجزء الصحيح للعدد الحقيقي t.

(1) بين أن المتتاليتين (x_n) و (y_n) تزايديتان قطعا.

(2) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{y_n}{n}$.

(3) (a) بين أن، $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad E\Big(\dfrac{x_n}{\omega} + 1\Big) = y_n - x_n$.

(b) استنتج أن، $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad y_n - x_n = n$.

(4) (a) بين أن، $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad E\left(\frac{y_n}{\omega} + 1\right) = x_{y_n} - y_n + 1$.

(b) استنتج أن، $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad x_{y_n} = x_n + y_n$.

(c) حدد $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x_{y_n}}{n}$.

الجزء D

لتكن $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي،

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$

المتتالية (a_n) هي متتالية فيبوناتشي.

(1) بين أن، $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \geqslant n$، ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

(2) بين أن، $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\omega^{n+1} - (1-\omega)^{n+1}\right)$.

(3) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي، $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

(a) تحقق أنه لكل عدد صحيح طبيعي n، لدينا،

$$\omega^{n+1}(u_n - \omega)a_n = (-1)^{n+1}. \qquad \text{و} \qquad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$$

(b) استنتج أن (u_n) متتالية متقاربة وحدد نهايتها.

(4) لتكن $(S_n)_{n \geqslant 1}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي، $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_{k-1}}{2^k}$. بين أن المتتالية (S_n) متقاربة وحدد نهايتها.

(5) تحقق أن، $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \omega = \frac{a_{n+2}\,\omega + a_{n+1}}{a_{n+1}\,\omega + a_n}$.

الجزء E

(1) لكل n من $\mathbb{N}^*$، تحقق أن، $E(a_{2n}\,\omega) = a_{2n+1}$.

(2) حدد $E(a_{2n-1}\,\omega)$ و $E(a_{2n-1}\,\omega^2)$.

لتكن المجموعة الآتية، $B = \left\{\left(E(n\omega^2), E(n\omega)\right) \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

(3) بين أن، $B = \left\{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2} \mid q = E\big((p-q)\omega\big)\right\}$.

(4) بين أن، $B = \left\{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2} \mid 0 < p - q\omega < \dfrac{1}{\omega}\right\}$.

(5) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{E(n\omega^2)}{E(n\omega)}$.

Sujet d'étude 3 en Analyse. Le nombre d'or et la suite de Fibonacci

Résumé, Ce sujet tourne autour du nombre d'or $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On étudie des suites définies à l'aide de la partie entière des multiples $n\omega$, puis la suite de Fibonacci, sa formule explicite, la convergence du quotient de deux termes consécutifs vers ω et une série associée. On termine par la description d'un ensemble de couples d'entiers à l'aide de la partie entière.

Partie A

Le nombre d'or est le réel positif ω défini par $\omega = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Vérifier que, $\omega^2 = \omega + 1 \quad \text{et} \quad \dfrac{1}{\omega} = \omega - 1$.

Partie B

Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels. Montrer que, $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \lambda_n \geqslant n$, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n$.

Partie C

On considère les suites numériques $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \qquad \begin{cases} x_n = E(n\omega) \\ y_n = E(x_n\omega) + 1 \end{cases}$$

où $E(t)$ désigne la partie entière du réel t.

(1) Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont strictement croissantes.

(2) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{y_n}{n}$.

(3) (a) Montrer que, $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad E\Big(\dfrac{x_n}{\omega} + 1\Big) = y_n - x_n$.

(b) En déduire que, $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad y_n - x_n = n$.

(4) (a) Montrer que, $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad E\Big(\dfrac{y_n}{\omega} + 1\Big) = x_{y_n} - y_n + 1$.

(b) En déduire que, $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad x_{y_n} = x_n + y_n$.

(c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{y_n}}{n}$.

Partie D

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$

La suite (a_n) est la suite de Fibonacci.

(1) Montrer que, $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \geqslant n$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

(2) Montrer que, $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\omega^{n+1} - (1-\omega)^{n+1}\right)$.

(3) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

(a) Vérifier que, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \qquad \text{et} \qquad \omega^{n+1}(u_n - \omega)a_n = (-1)^{n+1}.$$

(b) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

(4) Soit $(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_{k-1}}{2^k}$. Montrer que la suite (S_n) converge et déterminer sa limite.

(5) Vérifier que, $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \omega = \dfrac{a_{n+2}\,\omega + a_{n+1}}{a_{n+1}\,\omega + a_n}$.

Partie E

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier que, $E(a_{2n}\,\omega) = a_{2n+1}$.

(2) Déterminer $E(a_{2n-1}\,\omega)$ et $E(a_{2n-1}\,\omega^2)$.

On considère l'ensemble, $B = \left\{\left(E(n\omega^2), E(n\omega)\right) \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

(3) Montrer que, $B = \left\{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2} \mid q = E\big((p-q)\omega\big)\right\}$.

(4) Montrer que, $B = \left\{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2} \mid 0 < p - q\omega < \dfrac{1}{\omega}\right\}$.

(5) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{E(n\omega^2)}{E(n\omega)}$.

Study Topic 3 in Analysis. The Golden Ratio and the Fibonacci Sequence

Summary, This topic revolves around the golden ratio $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. We study sequences defined through the integer part of the multiples $n\omega$, then the Fibonacci sequence, its closed form, the convergence of the ratio of consecutive terms to ω and an associated series. We finish by describing a set of pairs of integers by means of the integer part.

Part A

The golden ratio is the positive real number ω given by $\omega = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Check that, $\omega^2 = \omega + 1$ and $\dfrac{1}{\omega} = \omega - 1$.

Part B

Let $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a strictly increasing sequence of natural numbers. Show that, $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \lambda_n \geqslant n$, then determine $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n$.

Part C

Consider the sequences $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ and $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ defined by

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \qquad \begin{cases} x_n = E(n\omega) \\ y_n = E(x_n\omega) + 1 \end{cases}$$

where $E(t)$ denotes the integer part of the real number t.

(1) Show that the sequences (x_n) and (y_n) are strictly increasing.

(2) Compute $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n}$ and $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{y_n}{n}$.

(3) (a) Show that, $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad E\Big(\dfrac{x_n}{\omega} + 1\Big) = y_n - x_n$.

(b) Deduce that, $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad y_n - x_n = n$.

(4) (a) Show that, $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad E\Big(\dfrac{y_n}{\omega} + 1\Big) = x_{y_n} - y_n + 1$.

(b) Deduce that, $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad x_{y_n} = x_n + y_n$.

(c) Determine $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{y_n}}{n}$.

Part D

Let $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be the sequence defined by

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$

The sequence (a_n) is the Fibonacci sequence.

(1) Show that, $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \geqslant n$, then compute $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

(2) Show that, $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\omega^{n+1} - (1-\omega)^{n+1}\right)$.

(3) Consider the sequence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ defined by, $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

(a) Check that, for every natural number n,

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \qquad \text{and} \qquad \omega^{n+1}(u_n - \omega)a_n = (-1)^{n+1}.$$

(b) Deduce that (u_n) converges and determine its limit.

(4) Let $(S_n)_{n\geqslant 1}$ be the sequence defined by, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_{k-1}}{2^k}$. Show that (S_n) converges and determine its limit.

(5) Check that, $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \omega = \dfrac{a_{n+2}\,\omega + a_{n+1}}{a_{n+1}\,\omega + a_n}$.

Part E

(1) For every $n \in \mathbb{N}^*$, check that, $E(a_{2n}\,\omega) = a_{2n+1}$.

(2) Determine $E(a_{2n-1}\,\omega)$ and $E(a_{2n-1}\,\omega^2)$.

Consider the set, $B = \left\{\left(E(n\omega^2), E(n\omega)\right) \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

(3) Show that, $B = \left\{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2} \mid q = E\big((p-q)\omega\big)\right\}$.

(4) Show that, $B = \left\{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2} \mid 0 < p - q\omega < \dfrac{1}{\omega}\right\}$.

(5) Compute $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{E(n\omega^2)}{E(n\omega)}$.