بسم الله الرحمن الرحيم

Professeur, Saad Choukri — **الأستاذ، سعد شكري**

Terminale SM — **باكالوريا علوم رياضية**

الموضوع 2 في التحليل. مسافة نقطة عن $\mathbb{Z}$

ملخص، يدرس هذا الموضوع الدالة d التي تربط كل عدد حقيقي x بأصغر مسافة بينه وبين الأعداد الصحيحة النسبية. نثبت خاصيات التأطير والزوجية والدورية، ونعطي تعبيرا صريحا للدالة على $[0,1]$ ثم ندرس اتصالها، ونختم بتمييز الأعداد الجذرية بواسطة نهائية المجموعة $\{d(nx)\}$ وبدراسة حالة عدد لا جذري.

لكل x من $\mathbb{R}$، نرمز بـ $d(x)$ لمسافة x عن $\mathbb{Z}$، أي أصغر مسافة بين x وعنصر p من $\mathbb{Z}$، ونكتب،

$$d(x) = \min_{p\in\mathbb{Z}} |x-p|.$$

(1) بين أن، $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad 0 \leqslant d(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

(2) بين أن، $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad d(-x) = d(x)$.

(3) بين أن العدد 1 دور للدالة d.

(4) استنتج أن، $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall k \in \mathbb{Z}) \quad d(x+k) = d(x)$.

(5) بين أن،

$$d(x) = \begin{cases} x\,, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1-x\,, & x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

(6) ادرس اتصال الدالة d على $\mathbb{R}$.

(7) ليكن x من $\mathbb{R}$. بين أن المجموعة $\{d(nx) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ منتهية إذا وفقط إذا كان x عددا جذريا.

(8) ليكن x من $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. نضع $\alpha = d(x)$.

(a) بين أن، $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

(b) بين أن، $d(nx) = d(n\alpha) \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

Sujet d'étude 2 en Analyse.
Distance d'un réel à $\mathbb{Z}$

Résumé, Ce sujet étudie la fonction d qui associe à tout réel x sa plus petite distance aux entiers relatifs. On établit son encadrement, sa parité et sa périodicité, on en donne une expression explicite sur $[0,1]$ puis on étudie sa continuité. On termine par une caractérisation des rationnels par la finitude de l'ensemble $\{d(nx)\}$ et par l'étude du cas d'un irrationnel.

Pour tout réel x, on note $d(x)$ la distance de x à $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire la plus petite distance entre x et un élément p de $\mathbb{Z}$, et on écrit

$$d(x) = \min_{p\in\mathbb{Z}} |x-p|.$$

(1) Montrer que, $\quad(\forall x \in \mathbb{R}) \quad 0 \leqslant d(x) \leqslant \dfrac{1}{2}.$

(2) Montrer que, $\quad(\forall x \in \mathbb{R}) \quad d(-x) = d(x).$

(3) Montrer que 1 est une période de la fonction d.

(4) En déduire que, $\quad(\forall x \in \mathbb{R})(\forall k \in \mathbb{Z}) \quad d(x+k) = d(x).$

(5) Montrer que,

$$d(x) = \begin{cases} x\,, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1-x\,, & x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

(6) Étudier la continuité de d sur $\mathbb{R}$.

(7) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $\{d(nx) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ est fini si et seulement si x est rationnel.

(8) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On pose $\alpha = d(x)$.

(a) Montrer que, $\quad 0 < \alpha < \dfrac{1}{2}.$

(b) Montrer que, $\quad(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad d(nx) = d(n\alpha).$

Study Topic 2 in Analysis.
Distance from a Real Number to $\mathbb{Z}$

Summary, This topic studies the function d that maps each real number x to its smallest distance to the integers. We prove that it is bounded, even and periodic, give an explicit expression on $[0,1]$ and study its continuity. We finish with a characterisation of rational numbers through the finiteness of the set $\{d(nx)\}$ and with the case of an irrational number.

For every real number x, let $d(x)$ denote the distance from x to $\mathbb{Z}$, that is the smallest distance between x and an element p of $\mathbb{Z}$; we write

$$d(x) = \min_{p\in\mathbb{Z}} |x-p|.$$

(1) Show that, $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad 0 \leqslant d(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

(2) Show that, $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad d(-x) = d(x)$.

(3) Show that 1 is a period of the function d.

(4) Deduce that, $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall k \in \mathbb{Z}) \quad d(x+k) = d(x)$.

(5) Show that,

$$d(x) = \begin{cases} x\,, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1-x\,, & x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

(6) Study the continuity of d on $\mathbb{R}$.

(7) Let $x \in \mathbb{R}$. Show that the set $\{d(nx) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ is finite if and only if x is rational.

(8) Let $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Set $\alpha = d(x)$.

(a) Show that, $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$.

(b) Show that, $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad d(nx) = d(n\alpha)$.