بسم الله الرحمن الرحيم

Professeur, Saad Choukri — **الأستاذ، سعد شكري**

Terminale SM — **باكالوريا علوم رياضية**

الموضوع 1 في التحليل. اتصال دالة معرفة بشروط

ملخص، يتناول هذا الموضوع دالة φ_α معرفة ضمنيا بالشرط $f\big(\varphi_\alpha(x)\big) = \alpha f(x)$، حيث f دالة متصلة وتزايدية قطعا. نوظف مبرهنة القيم الوسيطية وخاصية التقابل لإثبات وجود ووحدانية الصورة، ثم نقارن $\varphi_\alpha(x)$ بـ x وندرس النقط الصامدة، وأخيرا نبرهن على اتصال φ_α باعتبارها مركب الدالة العكسية f^{-1} والدالة αf.

لتكن f دالة متصلة وتزايدية قطعا على المجال $I = [a, b]$ مع $f(a) = 0$، وليكن α عنصرا من المجال $[0, 1]$.

(1) بين أن، $(\forall x \in I)(\exists!\, y \in I),\ f(y) = \alpha f(x)$.

(2) ليكن φ_α التطبيق المعرف بما يلي،

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha :\ I &\longrightarrow I \\ x &\longmapsto \varphi_\alpha(x) \end{aligned}$$

حيث $\varphi_\alpha(x)$ هو العنصر الوحيد y من I الذي يحقق $f(y) = \alpha f(x)$.

(a) بين أن، $(\forall x \in I) \quad \varphi_\alpha(x) \leqslant x$.

(b) نفترض أن $0 \leqslant \alpha < 1$. بين أن، $\big(\varphi_\alpha(x) = x \iff x = a\big) \quad (\forall x \in I)$.

(3) بين أن φ_α دالة متصلة على I.

Sujet d'étude 1 en Analyse. Continuité d'une fonction définie par conditions

Résumé, Ce sujet étudie une fonction φ_α définie implicitement par la condition $f\big(\varphi_\alpha(x)\big) = \alpha f(x)$, où f est continue et strictement croissante. On utilise le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la bijection pour établir l'existence et l'unicité de l'image, on compare ensuite $\varphi_\alpha(x)$ à x et on étudie les points fixes, puis on démontre la continuité de φ_α en l'écrivant comme composée de la bijection réciproque f^{-1} et de αf.

Soit f une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $I = [a, b]$ telle que $f(a) = 0$, et soit α un élément de l'intervalle $[0, 1]$.

(1) Montrer que, $\quad (\forall x \in I)(\exists!\, y \in I),\ f(y) = \alpha f(x)$.

(2) Soit φ_α l'application définie par,

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha :\ I &\longrightarrow I \\ x &\longmapsto \varphi_\alpha(x) \end{aligned}$$

où $\varphi_\alpha(x)$ est l'unique élément y de I tel que $f(y) = \alpha f(x)$.

(a) Montrer que, $\quad (\forall x \in I) \quad \varphi_\alpha(x) \leqslant x$.

(b) On suppose que $0 \leqslant \alpha < 1$. Montrer que,

$$(\forall x \in I) \qquad \big(\varphi_\alpha(x) = x \iff x = a\big).$$

(3) Montrer que φ_α est continue sur I.

Study Topic 1 in Analysis. Continuity of a Function Defined by Conditions

Summary, This topic studies a function φ_α defined implicitly by the condition $f\big(\varphi_\alpha(x)\big) = \alpha f(x)$, where f is continuous and strictly increasing. The intermediate value theorem and the bijection theorem are used to prove the existence and uniqueness of the image; $\varphi_\alpha(x)$ is then compared with x and its fixed points are studied; finally, the continuity of φ_α is proved by writing it as the composition of the inverse function f^{-1} with αf.

Let f be a continuous and strictly increasing function on the interval $I = [a, b]$ with $f(a) = 0$, and let α be an element of the interval $[0, 1]$.

(1) Show that, $\quad (\forall x \in I)(\exists!\, y \in I),\ f(y) = \alpha f(x)$.

(2) Let φ_α be the map defined by,

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha :\ & I \longrightarrow I \\ & x \longmapsto \varphi_\alpha(x) \end{aligned}$$

where $\varphi_\alpha(x)$ is the unique element $y \in I$ such that $f(y) = \alpha f(x)$.

(a) Show that, $\quad (\forall x \in I) \quad \varphi_\alpha(x) \leqslant x$.

(b) Assume that $0 \leqslant \alpha < 1$. Show that,

$$(\forall x \in I) \qquad \big(\varphi_\alpha(x) = x \iff x = a\big).$$

(3) Show that φ_α is continuous on I.