

EXAMEN BLANC — SIMILI N° 5
Structures algébriques — Arithmétique — Nombres complexes — Analyse

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

 Exercice 1 (3,5 points)

Dans $\text{IM}_2(\mathbb{R})$ on considère l'ensemble

$$E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

et on pose $I = M(1, 0)$, $N = M(0, 1)$ et $O = M(0, 0)$.

- (1)
 - (a) Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\text{IM}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$. (0,5 pt)
 - (b) Montrer que (I, N) est une base de $(E, +, \cdot)$, puis en déduire $\dim E$. (0,25 pt)
- (2)
 - (a) Vérifier que $N^2 = O$, puis montrer que E est une partie stable de $(\text{IM}_2(\mathbb{R}), \times)$. (0,5 pt)
 - (b) Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire. (0,5 pt)
- (3)
 - (a) Montrer que $M(a, b)$ est inversible dans E si et seulement si $a \neq 0$, puis déterminer son inverse dans ce cas. (0,75 pt)
 - (b) L'anneau $(E, +, \times)$ est-il un corps ? Justifier la réponse. (0,25 pt)
- (4) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); (M(a, b))^n = M(a^n; n a^{n-1}b)$. (0,5 pt)
- (5) Résoudre dans E l'équation (II) $X^2 = M(1, 2)$. (0,25 pt)

 Exercice 2 (3 points)

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) $143u - 840v = 1$.

- (1)
 - (a) Vérifier que $143 \times 47 - 840 \times 8 = 1$, puis en déduire $143 \wedge 840$. (0,25 pt)
 - (b) Résoudre l'équation (E). (0,5 pt)
 - (c) Résoudre dans $\mathbb{Z}/840\mathbb{Z}$ l'équation (F) $\overline{143} \times d = \overline{1}$. (0,25 pt)
- (2) Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$ tel que $n \wedge 899 = 1$. (On donne $899 = 29 \times 31$.)
 - (a) Montrer que $n \wedge 29 = 1$ et $n \wedge 31 = 1$. (0,5 pt)
 - (b) En déduire que $n^{840} \equiv 1 [899]$. (0,75 pt)
- (3) Déterminer un entier naturel n tel que $100 \leq n \leq 1000$ et $n^{143} \equiv 1 [899]$, en justifiant la réponse. (0,75 pt)

 Exercice 3 (3,5 points)

Soit θ un réel de $]0; \frac{\pi}{2}[$.

- (1) Écrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes $1 + e^{2i\theta}$ et $1 - e^{2i\theta}$. (1 pt)
- (2) En déduire le module et un argument du nombre complexe $Z = \frac{1 + e^{2i\theta}}{1 - e^{2i\theta}}$. (0,75 pt)
- (3) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $z^2 - 2z \cos \theta + 1 = 0$.

- (a) Résoudre (E) et écrire les solutions sous forme exponentielle. (0,5 pt)
- (b) Montrer que si z est une solution de (E) alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*); z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos(n\theta)$. (0,75 pt)
- (c) En déduire la valeur de $z^5 + \frac{1}{z^5}$ lorsque z est une solution de l'équation $z^2 - 2z \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1 = 0$. (0,5 pt)

Problème (10 points)

Partie I. (1,5 point)

- (1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); \sqrt{x^2 + 1} - x > 0$ et que $\sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$. (0,75 pt)
- (2) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$. (0,75 pt)

Partie II. (4 points) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$, et soit (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- (1) Montrer que f est impaire, puis interpréter géométriquement le résultat. (0,5 pt)
- (2) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, puis dresser le tableau de variations de f . (0,75 pt)
- (3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis en déduire la nature de la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$. (0,75 pt)
- (4) Étudier la concavité de (C_f) et montrer qu'elle admet un point d'inflexion que l'on précisera. (0,5 pt)
- (5) Construire (C_f) . (0,75 pt)
- (6) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, puis montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); f^{-1}(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2}$. (0,75 pt)

Partie III. (2 points) Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$.

- (1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. (0,5 pt)
- (2) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. (0,25 pt)
- (3) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); (n+1)I_{n+1} + nI_{n-1} = \sqrt{2}$. (0,75 pt)
- (4) En admettant que la suite (nI_n) est convergente, déterminer sa limite. (0,5 pt)

Partie IV. (2,5 points) Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int_0^x f(t) dt$.

- (1) Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que G est paire. (0,5 pt)
- (2) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); G(x) = x f(x) + \sqrt{x^2 + 1} - 1$. (1 pt)
- (3) Dresser le tableau de variations de G sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)
- (4) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{x}$, puis en déduire la nature de la branche infinie de la courbe de G au voisinage de $+\infty$. (0,5 pt)

