

EXAMEN BLANC — SIMILI N° 4
Structures algébriques — Arithmétique — Nombres complexes — Analyse

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

✂ **Exercice 1** _____ (3,5 points)

On munit l'ensemble $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par

$$(\forall (a, b) \in G) (\forall (c, d) \in G); (a, b) * (c, d) = (ac; ad + b)$$

- (1)
- (a) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans G . (0,25 pt)
 - (b) Montrer que $*$ est associative dans G . (0,5 pt)
- (2)
- (a) Montrer que $*$ admet un élément neutre dans G que l'on déterminera. (0,25 pt)
 - (b) Déterminer le symétrique de tout élément (a, b) de G pour la loi $*$. (0,5 pt)
- (3) Montrer que $(G, *)$ est un groupe non commutatif. (0,25 pt)
- (4) Soit $H = \{(1, b) / b \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $(H, *)$ est un sous-groupe commutatif de $(G, *)$ isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$. (0,75 pt)
- (5) Montrer que l'application ψ définie de G vers $\text{IM}_2(\mathbb{R})$ par $\psi(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est un morphisme injectif de $(G, *)$ vers $(\text{IM}_2(\mathbb{R}), \times)$, puis en déduire que $\psi(G)$ est un groupe pour la multiplication des matrices. (0,75 pt)
- (6) Soit $K = \{(a, 0) / a \in \mathbb{R}^*\}$. Montrer que $(K, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$ isomorphe à $(\mathbb{R}^*, \times)$. (0,25 pt)

✂ **Exercice 2** _____ (3 points)

Partie I. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) $9x^2 + 15x + 7 \equiv 0 [19]$.

- (1) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{Z}); 9x^2 + 15x + 7 \equiv (3x - 7)^2 - 4 [19]$. (0,5 pt)
- (2) En déduire l'ensemble des solutions de (E). (0,5 pt)

Partie II. Soit p un nombre premier tel que $p \geq 2$. On suppose qu'il existe a dans $\mathbb{Z}$ tel que $9a^2 + 15a + 7 \equiv 0 [p]$.

- (1)
- (a) Vérifier que $9a^2 + 15a + 7 = (3a + 2)(3a + 3) + 1$. (0,25 pt)
 - (b) En déduire que $p \geq 5$. (0,25 pt)
- (2) Montrer que $(3a + 2)^3 \equiv 1 [p]$, puis en déduire que $(3a + 2) \wedge p = 1$. (0,75 pt)
- (3) Montrer que $p \equiv 1 [3]$. (On pourra utiliser le théorème de Fermat.) (0,5 pt)
- (4) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que l'équation (F) $9x^2 + 15x + 7 \equiv 0 [2023]$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{Z}$. (On donne $2023 = 7 \times 17^2$.) (0,25 pt)

✂ **Exercice 3** _____ (3,5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et on considère trois points deux à deux distincts $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$.

- (1) Vérifier que $1 + j + j^2 = 0$ et que $j^3 = 1$. (0,25 pt)

- (2) Montrer que $(\forall (a, b, c) \in \mathbb{C}^3); a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = (a + jb + j^2c)(a + j^2b + jc)$. (1 pt)
- (3) Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. (1,25 pt)
- (4) En déduire que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$ ou $a + j^2b + jc = 0$. (0,5 pt)
- (5) Application : sachant que $a = 1$ et $b = i$, déterminer les valeurs possibles de l'affixe c pour que le triangle ABC soit équilatéral. (0,5 pt)

 Problème (10 points)

Partie I. (1,5 point)

- (1) Montrer que $(\forall t \in \mathbb{R}_+^*); \frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t$. (0,75 pt)

- (2) En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}); 0 < \ln(1+e^{-x}) \leq e^{-x}$. (0,75 pt)

Partie II. (4 points) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1+e^{-x})$, et soit (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, puis montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$. (0,75 pt)

- (2) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = \frac{-1}{1+e^x}$, puis dresser le tableau de variations de f . (0,75 pt)

- (3) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); f''(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$, puis étudier la concavité de (C_f) . (0,5 pt)

- (4) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); f(-x) = f(x) + x$, puis en déduire que la fonction $g : x \mapsto f(x) + \frac{x}{2}$ est paire. (0,75 pt)

- (5) Construire (C_f) . (0,75 pt)

- (6) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0; +\infty[$, puis déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$. (0,5 pt)

Partie III. (2,5 points) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

- (1) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $]0; 1[$. (0,75 pt)

- (2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \in [0; 1]$. (0,5 pt)

- (3) Montrer que $(\forall x \in [0; 1]); |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$, puis en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$. (0,75 pt)

- (4) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, puis déterminer la limite de (u_n) . (0,5 pt)

Partie IV. (2 points) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \int_0^n \ln(1+e^{-t}) dt$.

- (1) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. (0,5 pt)

- (2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); S_n \leq 1 - e^{-n}$, puis en déduire que (S_n) est convergente. (0,75 pt)

- (3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \ln 2 - \ln(1+e^{-n}) \leq S_n$, puis en déduire un encadrement de la limite L de la suite (S_n) . (0,75 pt)

