
EXAMEN BLANC — SIMILI N° 3

Structures algébriques — Arithmétique — Nombres complexes — Analyse

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

✂ Exercice 1 _____ (3,5 points)

Dans $\text{IM}_2(\mathbb{R})$ on considère l'ensemble

$$E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1+x & x \\ -x & 1-x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$$

- (1)
- (a) Montrer que $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2); M(x) \times M(y) = M(x + y)$. (0,5 pt)
 - (b) En déduire que E est une partie stable de $(\text{IM}_2(\mathbb{R}), \times)$. (0,25 pt)
- (2)
- (a) Montrer que l'application $\varphi : x \mapsto M(x)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(E, \times)$. (0,75 pt)
 - (b) En déduire que $(E, \times)$ est un groupe commutatif dont on précisera l'élément neutre. (0,25 pt)
- (3)
- (a) Déterminer l'inverse de $M(x)$ dans $(E, \times)$. (0,25 pt)
 - (b) Calculer $(M(x))^n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, puis résoudre dans E l'équation $X^3 = M(6)$. (0,75 pt)
- (4) L'ensemble E est-il une partie stable de $(\text{IM}_2(\mathbb{R}), +)$? Justifier la réponse. (0,5 pt)
- (5) Soit $H = \{M(x) / x \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $(H, \times)$ est un sous-groupe de $(E, \times)$. (0,25 pt)

✂ Exercice 2 _____ (3 points)

- (1)
- (a) Montrer que $6^{30} \equiv 1 [55]$. (0,5 pt)
 - (b) En déduire le reste de la division euclidienne de 6^{33} par 55. (0,25 pt)
- (2) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) \ 17x - 40y = 1$.
- (a) Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est non vide. (0,25 pt)
 - (b) En utilisant l'algorithme d'Euclide, donner une solution particulière de (E) . (0,5 pt)
 - (c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) . (0,25 pt)
 - (d) Déterminer le plus petit entier naturel x_0 tel que $17x_0 \equiv 1 [40]$. (0,25 pt)
- (3) On considère dans $\mathbb{Z}$ le système $(S) \begin{cases} x^{17} \equiv a [55] \\ x^{40} \equiv 1 [55] \end{cases}$, où $a \in \mathbb{N}$. Montrer que si x est une solution de (S) alors $x \equiv a^{33} [55]$. (0,5 pt)
- (4) On suppose dans cette question que $a \wedge 55 = 1$. Montrer que $a^{40} \equiv 1 [55]$, puis en déduire l'ensemble des solutions du système (S) . (0,5 pt)

✂ Exercice 3 _____ (3,5 points)

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. À tout point M d'affixe z avec $z \neq 1$, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z+1}{z-1}$.

- (1) Déterminer les points invariants par cette transformation. (0,5 pt)

- (2) Montrer que z' est réel si et seulement si M appartient à l'axe des abscisses privé du point $A(1)$. (0,75 pt)
- (3) Montrer que z' est imaginaire pur si et seulement si M appartient au cercle de centre O et de rayon 1, privé du point $A(1)$. (0,75 pt)
- (4) Déterminer l'ensemble des points M tels que $|z'| = 1$. (0,5 pt)
- (5) Déterminer et caractériser l'ensemble des points M tels que $|z'| = 2$. (0,5 pt)
- (6) Soit θ un réel de $]0; 2\pi[$ et M le point d'affixe $z = e^{i\theta}$. Montrer que $z' = -i \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$. (0,5 pt)

 Problème _____ (10 points)

Partie I. (1,5 point)

- (1) Montrer que $(\forall t \geq 1); \ln t \leq 2(\sqrt{t} - 1)$. (0,75 pt)
- (2) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$. (0,75 pt)

Partie II. (4 points) Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$, et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- (1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis interpréter géométriquement les résultats obtenus. (0,75 pt)
- (2) Montrer que $(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) = \frac{\ln x (2 - \ln x)}{x^2}$, puis dresser le tableau de variations de f . (0,75 pt)
- (3) Étudier le signe de f et préciser les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe (Ox) . (0,25 pt)
- (4) Construire $(\mathcal{C}_f)$. (0,75 pt)
- (5) Montrer que f réalise une bijection de $[e^2; +\infty[$ vers $]0; \frac{4}{e^2}]$. (0,5 pt)
- (6) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ il existe un unique α_n de $[e^2; +\infty[$ vérifiant $f(\alpha_n) = \frac{1}{n+1}$. (0,5 pt)
- (7) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et déterminer sa limite. (0,5 pt)

Partie III. (2 points) Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $J_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx$ et $K_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.

- (1) Calculer J_n pour tout n de $\mathbb{N}$, puis en déduire l'aire du domaine délimité par $(\mathcal{C}_f)$, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. (0,75 pt)
- (2) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); K_n + n K_{n-1} = e$. (0,75 pt)
- (3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq K_n \leq e - 1$ et que la suite (K_n) est décroissante ; en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} n K_n$. (0,5 pt)

Partie IV. (2,5 points) Soit F la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x \frac{(\ln t)^2}{t} dt$.

- (1) Montrer que F est dérivable sur $]0; +\infty[$, puis que $(\forall x \in]0; +\infty[); F(x) = \frac{(\ln x)^3}{3}$. (0,5 pt)
- (2) Dresser le tableau de variations de F et étudier les branches infinies de sa courbe. (0,5 pt)
- (3) Montrer que F réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$, puis déterminer $F^{-1}(x)$. (0,75 pt)
- (4) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ il existe un unique β_n de $]0; +\infty[$ tel que $F(\beta_n) = n$, puis exprimer β_n en fonction de n et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\beta_n)}{\sqrt[3]{n}}$. (0,75 pt)

