

EXAMEN BLANC — SIMILI N° 2
Structures algébriques — Arithmétique — Nombres complexes — Analyse

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

—❧— **Exercice 1** ————— (3,5 points)

On munit l'ensemble $E =]-1; +\infty[$ de la loi de composition interne $*$ définie par

$$(\forall (x, y) \in E \times E); x * y = x + y + xy$$

- (1) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans E . (0,5 pt)
- (2) Montrer que $*$ est commutative et associative dans E . (0,5 pt)
- (3)
 - (a) Montrer que $*$ admet un élément neutre dans E que l'on déterminera. (0,25 pt)
 - (b) Déterminer le symétrique de tout élément x de E pour la loi $*$. (0,25 pt)
- (4) Soit f l'application définie de E vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + x)$.
 - (a) Montrer que f est un isomorphisme de $(E, *)$ vers $(\mathbb{R}, +)$. (0,75 pt)
 - (b) En déduire la structure de $(E, *)$. (0,25 pt)
- (5) Pour tout x de E et tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $x^{(n)} = \underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ fois}}$.
 - (a) Montrer que $x^{(n)} = (1 + x)^n - 1$. (0,5 pt)
 - (b) Résoudre dans E l'équation $x^{(3)} = 7$. (0,25 pt)
- (6) Soit $H = \{x \in E / 1 + x \in \mathbb{Q}_+^*\}$. Montrer que $(H, *)$ est un sous-groupe de $(E, *)$. (0,25 pt)

—❧— **Exercice 2** ————— (3 points)

Dans le système décimal, on considère pour tout n de $\mathbb{N}^*$ l'entier naturel $a_n = \underbrace{11 \dots 11}_{n \text{ fois}}$.

- (1)
 - (a) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); a_n \equiv 1 [2]$ et $a_n \equiv 1 [5]$. (0,25 pt)
 - (b) Déterminer toutes les valeurs de n de $\mathbb{N}^*$ pour lesquelles $a_n \equiv 0 [3]$. (0,5 pt)
- (2) Soit p un nombre premier tel que $p > 5$. Vérifier que $9a_{p-1} = 10^{p-1} - 1$, puis montrer que $a_{p-1} \equiv 0 [p]$. (0,5 pt)
- (3)
 - (a) Vérifier que si m et n sont dans $\mathbb{N}^*$ et $m < n$, alors $a_n = 10^m a_{n-m} + a_m$. (0,5 pt)
 - (b) Soit q un entier de $\mathbb{N}^*$ tel que $q \wedge 10 = 1$. Montrer qu'il existe k de $\mathbb{N}^*$ tel que $a_k \equiv 0 [q]$. (0,5 pt)
- (4)
 - (a) Montrer que a_n est divisible par 7 si et seulement si $n \equiv 0 [6]$. (0,5 pt)
 - (b) Déterminer le plus grand entier naturel a_n divisible par 7 et inférieur à 10^{100} . (0,25 pt)

—❧— **Exercice 3** ————— (3,5 points)

Soit θ un réel de $]0; \pi[$ et on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $z^2 - 2(1 + \cos \theta)z + 2(1 + \cos \theta) = 0$.

- (1) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$, puis écrire chacune des solutions z_1 et z_2 sous forme exponentielle. (1,25 pt)
- (2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et on considère les points $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$.

- (a) Montrer que $OM_1 = OM_2$ et que M_2 est l'image de M_1 par la symétrie d'axe $(O; \vec{u})$. (0,5 pt)
- (b) Déterminer la valeur de θ pour laquelle le triangle OM_1M_2 est équilatéral. (0,5 pt)
- (c) Déterminer l'ensemble décrit par le point M_1 lorsque θ décrit $]0; \pi[$. (0,75 pt)
- (d) Calculer l'aire du triangle OM_1M_2 en fonction de θ . (0,5 pt)

 Problème _____ (10 points)

Partie I. (2 points)

- (1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$. Dresser le tableau de variations de g , puis en déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}); e^x \geq 1 + x$. (0,75 pt)
- (2) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x - 1)e^x + 1$.
- (a) Calculer $h'(x)$, puis dresser le tableau de variations de h . (0,75 pt)
- (b) En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}); h(x) \geq 0$. (0,5 pt)

Partie II. (4 points) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^*); f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- (1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)
- (2) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$. (0,75 pt)
- (3) Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \frac{1}{2}$. (0,75 pt)
- (4) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*); f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$, où h est la fonction de la Partie I, puis dresser le tableau de variations de f . (0,75 pt)
- (5) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) > 0$, puis construire $(\mathcal{C}_f)$. (0,75 pt)
- (6) Calculer l'aire du domaine délimité par $(\mathcal{C}_f)$, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$, en fonction de $\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$. (0,5 pt)

Partie III. (2 points)

- (1) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0; +\infty[$. (0,5 pt)
- (2) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ il existe un unique réel α_n tel que $f(\alpha_n) = n$. (0,5 pt)
- (3) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et déterminer sa limite. (0,5 pt)
- (4) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); e^{\alpha_n} = 1 + n \alpha_n$. (0,5 pt)

Partie IV. (2 points) Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^1 t^n e^t dt$.

- (1) Calculer I_0 et I_1 . (0,5 pt)
- (2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); I_{n+1} = e - (n + 1)I_n$. (0,5 pt)
- (3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n + 1}$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. (0,5 pt)
- (4) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n$. (0,5 pt)

