

EXAMEN BLANC — SIMILI N° 1

Structures algébriques — Arithmétique — Nombres complexes — Analyse

2^{ème} Bac Sciences Maths • Durée 4 heures • Barème sur 20 • Prof. Saad Choukri

✂ Exercice 1 (3,5 points)

Dans $\text{IM}_2(\mathbb{R})$ on pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble

$$E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+b \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- (1)
- (a) Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\text{IM}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$. (0,25 pt)
 - (b) Montrer que (I, J) est une base de $(E, +, \cdot)$, puis en déduire $\dim E$. (0,25 pt)
- (2)
- (a) Vérifier que $J^2 = J - I$, puis en déduire que $J^3 = -I$ et que $J^6 = I$. (0,5 pt)
 - (b) Montrer que E est une partie stable de $(\text{IM}_2(\mathbb{R}), \times)$. (0,25 pt)
- (3) On pose $\omega = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et on considère l'application f définie de $\mathbb{C}$ vers E par $f(a + b\omega) = M(a, b)$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
- (a) Montrer que $(1, \omega)$ est une base de l'espace vectoriel réel $\mathbb{C}$, puis que f est bijective. (0,25 pt)
 - (b) Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(E^*, \times)$. (0,75 pt)
 - (c) En déduire que $(E^*, \times)$ est un groupe commutatif. (0,25 pt)
- (4)
- (a) Montrer que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif. (0,5 pt)
 - (b) Déterminer l'inverse de toute matrice $M(a, b)$ de E^* . (0,25 pt)
- (5) Résoudre dans E l'équation (II) $X^3 = J$. (0,25 pt)

✂ Exercice 2 (3 points)

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $a_n = 2 \times 7^n + 3 \times 5^n - 5$.

- (1)
- (a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); a_{n+1} \equiv a_n [24]$. (0,5 pt)
 - (b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); a_n \equiv 0 [24]$. (0,25 pt)
- (2) Soit p un nombre premier tel que $p > 7$.
- (a) Montrer que $a_{p-1} \equiv 0 [p]$. (On pourra utiliser le théorème de Fermat.) (0,5 pt)
 - (b) En déduire que l'entier naturel a_{p-1} est divisible par $24p$. (0,25 pt)
- (3) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) $a_3x - a_2y = 5a_1$.
- (a) Montrer que (E) est équivalente à l'équation $44x - 7y = 5$. (0,5 pt)
 - (b) Résoudre l'équation (E) en précisant les différentes étapes de la résolution. (0,5 pt)
 - (c) Pour tout q de $\mathbb{N}$ on pose $x_q = 7q + 6$ et $y_q = 44q + 37$. Montrer que le couple (x_q, y_q) est solution de (E), puis déterminer les valeurs de q pour lesquelles $x_q \wedge y_q = 1$. (0,5 pt)

Exercice 3 (3,5 points)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $z^2 - (3 + e^{i\theta})z + 2(1 + e^{i\theta}) = 0$, où $\theta \in]0; 2\pi[$.

- (1) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$, puis écrire chacune des solutions sous forme exponentielle. (0,75 pt)
- (2) Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points $A(2)$ et $B(1 + e^{i\theta})$.
 - (a) Montrer que $|z_B - 1| = 1$, puis en déduire l'ensemble (Γ) décrit par le point B lorsque θ décrit $]0; 2\pi[$. (0,5 pt)
 - (b) Montrer que pour tout θ de $]0; 2\pi[$ le triangle OAB est rectangle en B . (0,75 pt)
 - (c) Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles $OB = AB$. (0,75 pt)
 - (d) Calculer l'aire du triangle OAB en fonction de θ , puis déterminer sa valeur maximale. (0,5 pt)
 - (e) Déterminer, en fonction de θ , l'affixe du point C image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. (0,25 pt)

Problème (10 points)

Partie I. (2 points)

- (1) Montrer que $(\forall t \in]-1; +\infty[); \frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t$. (0,75 pt)
- (2) En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); \frac{1}{1+x} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$. (0,5 pt)
- (3) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. (0,5 pt)
- (4) Montrer que $(\forall t \in \mathbb{R}_+^*); \ln(1+t) \geq t - \frac{t^2}{2}$. (0,25 pt)

Partie II. (4 points) Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, et soit (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- (1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, puis déterminer les asymptotes de (C_f) . (0,5 pt)
- (2) Montrer que $(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$, puis en déduire le signe de f' et dresser le tableau de variations de f . (0,75 pt)
- (3) Montrer que $(\forall x \in]0; +\infty[); f''(x) = \frac{-1}{x(1+x)^2}$, puis étudier la concavité de (C_f) . (0,5 pt)
- (4) Construire (C_f) . (0,75 pt)
- (5) Montrer que f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers $]0; 1[$. (0,5 pt)
- (6) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ il existe un unique réel β_n de $]0; +\infty[$ tel que $f(\beta_n) = 1 - \frac{1}{n}$, puis montrer que la suite $(\beta_n)_{n \geq 2}$ est croissante. (0,75 pt)
- (7) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n$. (0,25 pt)

Partie III. (2 points) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $u_n = f(n)$.

- (1) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et convergente, puis calculer sa limite. (0,5 pt)
- (2) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. (0,5 pt)
- (3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. (0,75 pt)
- (4) En déduire un encadrement de $n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$. (0,25 pt)

Partie IV. (2 points) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \int_x^{2x} \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) dt$.

- (1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); x \ln \left(1 + \frac{1}{2x} \right) \leq F(x) \leq x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$. (0,5 pt)
- (2) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$, puis montrer que F est prolongeable par continuité en 0. (0,5 pt)
- (3) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $F'(x) = 2 \ln \left(1 + \frac{1}{2x} \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$. (0,5 pt)
- (4) Montrer que F' est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, puis dresser le tableau de variations de F en précisant $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. (0,5 pt)

