

بسم الله الرحمن الرحيم



ESPACES VECTORIELS

الفضاءات المتجهية

Chapitre XV — Série d'exercices

Saad Choukri

Terminale SM



Rappels et notations. $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif, en pratique $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dit que E est un espace vectoriel réel. On note $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de X dans $\mathbb{R}$, et $\mathbb{R}[X]$ celui des polynômes à coefficients réels. Pour une partie A de E , $\text{Vect}(A)$ désigne l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A . Une famille $(e_\lambda)_{\lambda \in I}$, où I est quelconque, est dite libre si toute sous-famille finie l'est.

✦ Exercice 1. Un espace de fonctions

Soit F l'ensemble des fonctions numériques f définies par $f(x) = ax + b|x|$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

- (1) Montrer que F est un espace vectoriel réel.
- (2) Déterminer une base de F et en déduire sa dimension.

✦ Exercice 2. Le sous-espace engendré

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et A une partie non vide de E .

- (1) Montrer que $\text{Vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel de E .
- (2) Montrer que $\text{Vect}(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A , au sens de l'inclusion.
- (3) Montrer que $A \subset B$ entraîne $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$, et que $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(A)$.

✦ Exercice 3. Intersection, somme et réunion

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

- (1) Montrer que $F \cap G$ et $F + G = \{x + y \mid x \in F, y \in G\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E .
- (2) Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
- (3) Montrer que $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$.

✦ Exercice 4. Deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$

On pose

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\},$$

$$G = \text{Vect}((1, 1, 1)).$$

- (1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base de chacun.
- (2) Déterminer $F \cap G$.
- (3) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

✦ Exercice 5. Familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

On considère les vecteurs

$$u = (1, 2, -1), \quad v = (2, -1, 3), \quad w = (4, 3, 1).$$

- (1) La famille (u, v, w) est-elle libre ? génératrice de $\mathbb{R}^3$?
- (2) Déterminer une base de $\text{Vect}(u, v, w)$ et sa dimension.
- (3) Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^3$.

✦ Exercice 6. Une base de $\mathbb{R}_n[X]$

Soient n un entier naturel et a un nombre réel. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

- (1) Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n + 1$.

- (2) Montrer que la famille $(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- (3) En déduire les coordonnées du polynôme X^2 dans cette base lorsque $n = 2$.

✦ **Exercice 7.** *Un espace de suites*

Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

- (1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles.
- (2) Montrer que l'application qui à une suite de E associe le couple (u_0, u_1) est une bijection de E vers $\mathbb{R}^2$. En déduire la dimension de E .
- (3) Soient φ et ψ les deux racines de $x^2 - x - 1 = 0$. Montrer que les suites (φ^n) et (ψ^n) forment une base de E .

✦ **Exercice 8.** *Solutions d'une équation différentielle*

Soit S l'ensemble des fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f'' + f = 0$.

- (1) Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- (2) Montrer que la famille $(\cos, \sin)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- (3) En admettant que toute fonction de S s'écrit $x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x$, déterminer la dimension de S .

✦ **Exercice 9.** *Fonctions paires et fonctions impaires*

On note P (respectivement I) l'ensemble des fonctions paires (respectivement impaires) de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- (1) Montrer que P et I sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

riels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- (2) Montrer que $P \cap I = \{0\}$.

- (3) Montrer que P et I sont supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

✦ **Exercice 10.** *Fonctions périodiques*

Soit $T > 0$ un nombre réel et E_T l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont T -périodiques.

- (1) Montrer que E_T est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- (2) L'ensemble de toutes les fonctions périodiques est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? On pourra considérer les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \sin(x\sqrt{2})$.

✦ **Exercice 11.** *Une droite de $\mathbb{C}$*

Soit ω un nombre complexe non nul. On désigne par $\omega\mathbb{R}$ l'ensemble $\{\omega x \mid x \in \mathbb{R}\}$.

- (1) Montrer que $\omega\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ vu comme un espace vectoriel réel, et préciser sa dimension.
- (2) Pour quelle condition sur ω l'ensemble $\omega\mathbb{R}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel ?

✦ **Exercice 12.** *Une famille libre sur $\mathbb{Q}$*

On considère $\mathbb{R}$ comme un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{Q}$.

- (1) Montrer que la famille $(1, \sqrt{2})$ est libre sur $\mathbb{Q}$.
- (2) Montrer que la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est libre sur $\mathbb{Q}$.
- (3) En déduire que $\mathbb{R}$ n'est pas un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension finie.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

✦ **Exercice 13.** *Complexification d'un espace vectoriel*

Soit E un espace vectoriel réel. On munit $E \times E$ de l'addition usuelle

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

et de la multiplication externe par des complexes définie par

$$(a + ib) \cdot (x, y) = (a \cdot x - b \cdot y, a \cdot y + b \cdot x).$$

- Muni de ces lois, montrer que $E \times E$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

✦ **Exercice 14.** *Liberté de familles de fonctions*

- (1) Montrer que dans l'espace vectoriel des fonctions continues, la famille des fonctions $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ où $f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$ est libre.
- (2) Montrer que dans l'espace vectoriel des fonctions continues, la famille des fonctions $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ où $f_\lambda : x \mapsto \cos(\lambda x)$ est libre.

✦ **Exercice 15.** *Une famille de fonctions affines par morceaux*

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note g_λ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g_\lambda(x) = |x - \lambda|$.

- Montrer que la famille $(g_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

✦ **Exercice 16.** *Polynômes de degrés échelonnés*

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes. On considère une famille de polynômes $\mathcal{F} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ telle que

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \dots < \deg(P_n)$$

(on dit que $\mathcal{F}$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés).

- Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre.

✦ **Exercice 17.** *Réunion de sous-espaces vectoriels*

- (1) Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille non vide de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On suppose que pour tout $(i, j) \in I^2$, il existe $k \in I$ tel que $F_i \cup F_j \subset F_k$. Démontrer que $\bigcup_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E .
- (2) Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $k \geq 2$ un entier, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(V_i)_{1 \leq i \leq k}$ une famille de k sous-espaces vectoriels stricts de E (les V_i sont différents de $\{0\}$ et de E). Si $\bigcup_{1 \leq i \leq k} V_i$ est un sous-espace vectoriel, montrer que le corps $\mathbb{K}$ est fini et que son nombre d'éléments est $\leq k - 1$. Cette inégalité peut-elle être une égalité ?

Fin de la série — Saad Choukri, Terminale SM