

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



CALCUL DES PROBABILITÉS

حساب الاحتمالات

Chapitre XIV — Série d'exercices

Saad Choukri

Terminale SM



✦ Exercice 1. Tirages ordonnés

Une urne contient des boules numérotées de 1 à 10. On tire, sans remise, trois boules dans cette urne.

- (1) Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros en ordre croissant ?
- (2) Même question pour un tirage avec remise et des numéros en ordre strictement croissant.
- (3) Même question pour un tirage avec remise et des numéros en ordre croissant au sens large.

✦ Exercice 2. Boules blanches et boules noires

Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires. On tire successivement et sans remise trois boules de cette urne.

- (1) Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure dans le tirage ?
- (2) Sachant qu'une boule noire figure dans le tirage, quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire ?
- (3) Quelle est la probabilité que la troisième boule du tirage soit noire ?

✦ Exercice 3. Un comité de délégués

Une classe compte 30 élèves : 18 filles et 12 garçons. On choisit au hasard un comité de 4 élèves, tous les comités étant équiprobables.

- (1) Quelle est la probabilité que le comité soit composé d'exactly deux filles et deux garçons ?
- (2) Quelle est la probabilité que le comité comporte au moins un garçon ?
- (3) Deux élèves de la classe, Amine et Sara, sont in-

séparables. Quelle est la probabilité qu'ils soient tous les deux choisis ? Quelle est la probabilité qu'aucun des deux ne le soit ?

✦ Exercice 4. Transmission d'une information

Une succession d'individus $A_1, \dots, A_n$ se transmet une information binaire du type « oui » ou « non ». Chaque individu A_k transmet l'information qu'il a reçue avec la probabilité p à l'individu A_{k+1} , ou la transforme en son inverse avec la probabilité $1 - p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres, et $0 < p < 1$.

- (1) Calculer la probabilité p_n pour que l'information reçue par A_n soit identique à celle émise par A_1 .
- (2) Déterminer la limite de p_n quand n tend vers l'infini.

✦ Exercice 5. Un jeu vidéo

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ; que s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est 0,8 ; et que s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est 0,6. Pour tout entier naturel non nul n , on note G_n l'évènement « le joueur gagne la n -ième partie » et p_n sa probabilité.

- (1) Montrer que $p_2 = 0,62$.
- (2) Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
- (3) Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières.
- (4) Montrer que pour tout entier naturel non nul n ,

$$p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}.$$

- (5) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n ,

$$p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \times \frac{1}{5^n}.$$

- (6) Retrouver la formule précédente sans utiliser de récurrence.

✦ Exercice 6. Un dé pipé

On considère un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées $-1, -1, -1, 0, 1$ et 1 .

Partie I. On jette ce dé deux fois de suite et on enregistre successivement les numéros obtenus.

- (1) Calculer la probabilité de chacun des événements A : « obtenir deux numéros différents » et B : « obtenir deux numéros dont la somme est nulle ».
- (2) Calculer la probabilité de l'évènement C : « obtenir deux numéros différents sachant que la somme de ces deux numéros est nulle ».
- (3) Soit X la variable aléatoire égale à la somme des deux numéros obtenus.
 - (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X .
 - (b) Calculer la probabilité de l'évènement $\{X > 0\}$.

Partie II. On jette cette fois le dé n fois de suite, où $n \geq 2$, et on considère la variable aléatoire Y égale au nombre de fois où le numéro 1 apparaît.

- (1) Calculer, en fonction de n , la probabilité p_n de l'évènement $\{Y = 2\}$.
- (2) Calculer, en fonction de n , la probabilité q_n de l'évènement $\{Y \geq 1\}$, puis en déduire la limite de la suite $(q_n)_{n \geq 2}$.
- (3) Déterminer le plus petit entier naturel $n \geq 2$ pour lequel $q_n \geq 0,99$.

✦ Exercice 7. Deux boules vertes

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher, deux vertes et trois rouges.

- (1) On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.
 - (a) Vérifier que $P(X = 0) = \frac{3}{10}$, puis déterminer la loi de probabilité de X .
 - (b) Calculer l'espérance mathématique de X .
 - (c) Calculer la probabilité de l'évènement A : « les deux boules tirées sont de même couleur ».
- (2) On effectue deux tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante : si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne ; si elle est verte,

on ne la remet pas.

- (a) À l'aide d'un arbre pondéré, calculer la probabilité des événements B : « seule la première boule tirée est verte » et C : « exactement une des deux boules tirées est verte ».
- (b) Sachant que l'on a tiré exactement une boule verte, quelle est la probabilité que cette boule verte soit la première tirée ?

✦ Exercice 8. Un questionnaire à choix multiples

Un questionnaire comporte 10 questions indépendantes, chacune proposant 4 réponses dont une seule est correcte. Un candidat répond au hasard à chaque question. On note X le nombre de réponses correctes.

- (1) Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.
- (2) Calculer la probabilité que le candidat donne exactement trois réponses correctes.
- (3) Calculer la probabilité qu'il donne au moins une réponse correcte.

✦ Exercice 9. Un test de dépistage

Une maladie touche 2 % d'une population. Un test de dépistage donne un résultat positif chez 95 % des personnes malades, et chez 3 % des personnes saines. On choisit une personne au hasard dans la population et on la soumet au test.

- (1) Calculer la probabilité que le test soit positif.
- (2) Sachant que le test est positif, calculer la probabilité que la personne soit réellement malade. Commenter le résultat.
- (3) Sachant que le test est négatif, calculer la probabilité que la personne soit saine.

✦ Exercice 10. La différence de deux dés

On lance deux dés équilibrés à six faces et on note X la valeur absolue de la différence des deux numéros obtenus.

- (1) Déterminer la loi de probabilité de X .
- (2) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
- (3) Calculer $P(X \leq 2)$.

✦ Exercice 11. Le rang du premier six

On lance indéfiniment un dé équilibré à six faces. On note X le rang du lancer donnant le premier 6.

- (1) Calculer $P(X = n)$ pour tout entier naturel non nul n .
- (2) Calculer $P(X \leq n)$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq n)$. Interpréter le résultat.
- (3) Calculer $\sum_{k=1}^n kP(X = k)$ et déterminer sa limite lorsque n tend vers l'infini.

✦ Exercice 12. Deux urnes

L'urne U_1 contient 3 boules blanches et 2 boules noires ; l'urne U_2 contient 1 boule blanche et 4 boules noires. On choisit une urne au hasard, chacune ayant la même probabilité d'être choisie, puis on y tire une boule.

- (1) Calculer la probabilité que la boule tirée soit blanche.
- (2) Sachant que la boule tirée est blanche, calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1 .
- (3) On remet la boule dans son urne et on répète l'expérience (en rechoisissant l'urne à chaque fois) n fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche ?

✦ Exercice 13. Un jeu équitable

Un joueur mise m dirhams et lance deux dés équilibrés. Si la somme des deux dés vaut 7, il reçoit 30 dirhams ; si elle vaut 2 ou 12, il reçoit 50 dirhams ; sinon il ne reçoit rien. On note G le gain algébrique du joueur, c'est-à-dire la somme reçue diminuée de la

mise.

- (1) Déterminer la loi de probabilité de G en fonction de m .
- (2) Calculer $E(G)$ en fonction de m .
- (3) Déterminer la mise m qui rend le jeu équitable, c'est-à-dire telle que $E(G) = 0$.

✦ Exercice 14. Nombre de tirages avant répétition

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On tire avec remise des boules dans cette urne jusqu'à ce qu'une boule ait été tirée deux fois. On note T la variable aléatoire, à valeurs dans $\llbracket 2, n+1 \rrbracket$, précisant le nombre de tirages alors effectués.

- (1) Proposer un espace probabilisé (Ω, P) modélisant cette expérience.
- (2) Calculer $P(T = 2)$.
- (3) Soit $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Exprimer $P(T > k \mid T > k-1)$.
- (4) Donner une expression de $P(T = k)$ pour tout $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

✦ Exercice 15. Le trésor et les coffres

On considère N coffres. Avec une probabilité p , un trésor a été placé dans l'un de ces coffres, chaque coffre pouvant être choisi de façon équiprobable. On a ouvert $N-1$ coffres sans trouver le trésor.

- Quelle est la probabilité pour qu'il figure dans le dernier coffre ?

✦ Exercice 16. Une majoration exponentielle

Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements mutuellement indépendants.

- Montrer que la probabilité qu'aucun des A_i ne soit réalisé est inférieure à

$$\exp \left(- \sum_{i=1}^n P(A_i) \right).$$

✦ Exercice 17. Inégalité de Boole-Fréchet

Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

- (1) Montrer que

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \leq \min_{1 \leq i \leq n} P(A_i).$$

- (2) Montrer que

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - (n-1).$$

✦ Exercice 18. Indépendance deux à deux

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé.

- (1) Montrer que si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B le sont, ainsi que $\bar{A}$ et $\bar{B}$.
- (2) On lance deux fois une pièce équilibrée. On note A : « le premier lancer donne pile », B : « le second lancer donne pile » et C : « les deux lancers donnent le même résultat ». Montrer que A , B et C sont deux à deux indépendants mais ne sont pas mutuellement indépendants.

✦ Exercice 19. Le problème des anniversaires

Dans un groupe de n personnes, on suppose que les dates de naissance sont indépendantes et uniformément réparties sur 365 jours.

- (1) Calculer la probabilité q_n que toutes les dates de naissance soient distinctes.
- (2) Montrer que $q_n \leq \exp \left(- \frac{n(n-1)}{730} \right)$.
- (3) En déduire une majoration du plus petit entier n pour lequel la probabilité que deux personnes au moins aient la même date de naissance dépasse $\frac{1}{2}$.



Fin de la série — Saad Choukri, Terminale SM