بسم الله الرحمن الرحيم

ANNEAUX ET CORPS

الحلقات والأجسام

Chapitre XIII — Série d'exercices

Saad Choukri — **Terminale SM**

Rappels et notations. *Tous les anneaux considérés sont unitaires ; l'élément unité de A est noté 1_A et son élément nul 0_A. Un* sous-anneau *de $(A,+,\times)$ est une partie de A contenant 1_A, qui est un sous-groupe de $(A,+)$ et qui est stable par multiplication. Un* morphisme d'anneaux *$f : A \to B$ est une application vérifiant $f(a+b) = f(a)+f(b)$, $f(ab) = f(a)f(b)$ pour tous $a, b \in A$, et $f(1_A) = 1_B$; un morphisme bijectif est un* isomorphisme. *On note $U(A)$ l'ensemble des éléments inversibles de A. Un anneau commutatif non nul est dit* intègre *s'il n'admet pas de diviseur de zéro. Enfin, un élément x de A est dit* nilpotent *s'il existe un entier naturel non nul n tel que $x^n = 0_A$; par exemple $\overline{2}$ est nilpotent dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.*

Exercice 1. *Le plus petit sous-anneau*

Soit A un anneau.

(1) Montrer qu'une intersection quelconque de sous-anneaux de A est un sous-anneau de A.

(2) Montrer que $\mathbb{Z}$ est le plus petit sous-anneau de $\mathbb{R}$ au sens de l'inclusion.

(3) Une réunion de deux sous-anneaux de A est-elle un sous-anneau de A ?

Exercice 2. *L'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$*

Pour $\omega \geq 0$, on note $\mathbb{Z}[\sqrt{\omega}] = \{a + b\sqrt{\omega} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{\omega}] = \{a + b\sqrt{\omega} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

(1) Montrer que $\big(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times\big)$ est un anneau commutatif unitaire.

(2) Soit a un entier naturel tel que $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$. Démontrer que $\big(\mathbb{Q}[\sqrt{a}], +, \times\big)$ est un corps.

(3) Soit ω un nombre complexe. Donner une condition nécessaire et suffisante sur ω pour que l'ensemble $\{a+b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ soit un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

Exercice 3. *Les entiers de Gauss*

On pose $\mathbb{Z}[i] = \{a+ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ et, pour $z = a+ib \in \mathbb{Z}[i]$, $N(z) = a^2 + b^2$.

(1) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

(2) Montrer que $N(zz') = N(z)N(z')$ pour tous $z, z' \in \mathbb{Z}[i]$.

(3) En déduire que z est inversible dans $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si $N(z) = 1$, puis déterminer $U\big(\mathbb{Z}[i]\big)$.

Exercice 4. *L'anneau produit*

Soient A et B deux anneaux non nuls. On munit $A \times B$ des lois définies composante par composante.

(1) Montrer que $A \times B$ est un anneau et préciser son élément unité.

(2) Montrer que (a, b) est inversible dans $A \times B$ si et seulement si $a \in U(A)$ et $b \in U(B)$.

(3) Montrer que $A \times B$ n'est jamais intègre.

Exercice 5. *Formules dans un anneau*

Soit A un anneau et a, b deux éléments de A qui commutent.

(1) Montrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

(2) Montrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

(3) Ces formules subsistent-elles si a et b ne commutent pas ?

Exercice 6. *L'anneau des fonctions*

Soit X un ensemble non vide. On munit $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ de l'addition et de la multiplication usuelles des fonctions.

(1) Montrer que $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ est un anneau commutatif unitaire.

(2) Déterminer $U\big(\mathcal{F}(X,\mathbb{R})\big)$.

(3) Montrer que cet anneau n'est pas intègre dès que X contient au moins deux éléments.

Exercice 7. *Idempotents d'un anneau intègre*

Soit A un anneau intègre et e un élément de A tel que $e^2 = e$.

- Montrer que $e = 0_A$ ou $e = 1_A$.

Exercice 8. *Corps et diviseurs de zéro*

(1) Montrer que tout corps commutatif est un anneau intègre.

(2) Montrer que tout sous-anneau d'un corps commutatif est intègre.

(3) L'anneau $\mathbb{Z}$ est intègre ; est-ce un corps ?

Exercice 9. *Inversibles modulo n*

Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Pour $a \in \mathbb{Z}$, on note $\bar{a}$ sa classe modulo n.

(1) Montrer que $\bar{a}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si $\operatorname{pgcd}(a,n) = 1$.

(2) En déduire que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est un nombre premier.

(3) Déterminer les diviseurs de zéro de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Exercice 10. *Morphismes d'anneaux*

Soient A et B deux anneaux et $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux.

(1) Montrer que $f(A)$ est un sous-anneau de B.

(2) Montrer que si $a \in U(A)$, alors $f(a) \in U(B)$ et $f\big(a^{-1}\big) = f(a)^{-1}$.

(3) Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}$ vers A.

Exercice 11. *Éléments nilpotents*

Soit A un anneau.

(1) Montrer que si x est nilpotent, alors $1_A - x$ est inversible et exprimer son inverse.

(2) On suppose A commutatif. Montrer que la somme de deux éléments nilpotents est nilpotente.

(3) Montrer qu'un anneau intègre n'admet pas d'élément nilpotent autre que 0_A.

Exercice 12. *Un sous-corps de $\mathbb{R}$*

On pose $K = \big\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \;\big|\; a,b,c \in \mathbb{Q}\big\}$.

(1) Montrer que K est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.

(3) Montrer que l'écriture $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ d'un élément de K est unique.

Exercice 13. *Caractéristique d'un anneau*

Soit A un anneau et n un entier naturel non nul. On note $n \cdot 1_A = \underbrace{1_A + 1_A + \cdots + 1_A}_{n \text{ fois}}$.

(1) On suppose qu'il existe $n \geq 1$ tel que $n \cdot 1_A = 0_A$ et on note p le plus petit de ces entiers. Montrer que $p \cdot x = 0_A$ pour tout $x \in A$.

(2) Montrer que si A est intègre, alors p est un nombre premier.

(3) Donner un exemple d'anneau pour lequel p n'existe pas, et un exemple où $p = 2$.

Exercice 14. *Un anneau non commutatif*

On note A l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, muni de l'addition et de la multiplication matricielles.

(1) Vérifier que A est un anneau unitaire non commutatif.

(2) Donner un exemple de diviseur de zéro dans A, puis un exemple d'élément nilpotent non nul.

(3) Montrer que l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a,b \in \mathbb{R}$, est un sous-anneau de A isomorphe à $\mathbb{C}$.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 15. *Un anneau fini intègre*

- Montrer qu'un anneau fini intègre est nécessairement un corps.

Exercice 16. *Un morphisme de corps est injectif*

Soient K et L deux corps et $f : K \to L$ un morphisme d'anneaux.

- Montrer que f est une application injective.

Exercice 17. *Les inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$*

Pour $z = a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on pose $N(z) = a^2 - 2b^2$.

(1) Montrer que $N(zz') = N(z)N(z')$, puis que z est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ si et seulement si $N(z) = \pm 1$.

(2) Montrer que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ strictement supérieurs à 1 sont tous $\geq 1 + \sqrt{2}$.

(3) En déduire que

$$U\big(\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\big) = \left\{ \pm \left(1 + \sqrt{2}\right)^n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Exercice 18. *Anneaux de Boole*

Soit A un anneau tel que $x^2 = x$ pour tout $x \in A$.

(1) Montrer que $x + x = 0_A$ pour tout $x \in A$.

(2) Montrer que l'anneau A est commutatif.

(3) Montrer que si A est intègre, alors A est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 19. *Sous-anneaux de $\mathbb{Q}$*

Soit A un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ et P l'ensemble des nombres premiers p tels que $\dfrac{1}{p} \in A$.

(1) Montrer que si $\dfrac{a}{b} \in A$ est une fraction irréductible, alors $\dfrac{1}{b} \in A$.

(2) En déduire que

$$A = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}^* \right\},$$

où b décrit les entiers dont tous les facteurs premiers appartiennent à P.

Fin de la série — Saad Choukri, Terminale SM